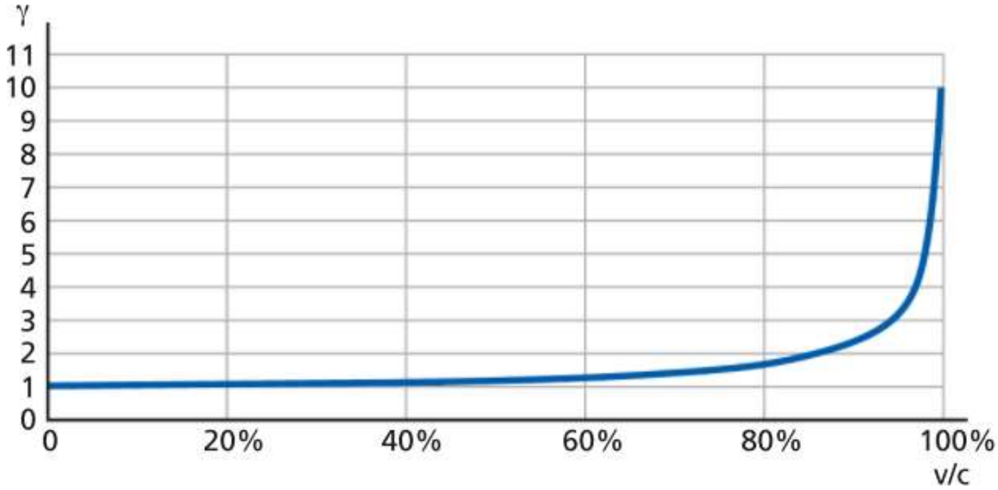
- Il fattore moltiplicativo $\gamma = 1\big/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ è adimensionale ed è sempre maggiore di 1, anche se per tutte le velocità con cui comunemente abbiamo a che fare è praticamente uguale a 1.



- Fino a una velocità v di circa $1{,}2 \cdot 10^8$ m/s, cioè fino al 40% della velocità della luce, l'approssimazione

$$\gamma \sim 1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} \tag{2}$$

è ottima e si può usare per valutare gli effetti di ritardo degli orologi in moto.

- Poiché $\gamma > 1$, la minima durata dell'intervallo fra due eventi che accadono nello stesso punto è quella misurata da un orologio fisso in quel punto ed è detta **intervallo di tempo proprio Δt_0** o semplicemente **tempo proprio**.

L'APPROSSIMAZIONE DEL COEFFICIENTE DI DILATAZIONE PER PICCOLE VELOCITÀ

Nel capitolo «La relatività dello spazio e del tempo» abbiamo introdotto il fattore di dilatazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

dove β è il numero puro

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Vogliamo ora trovare un'espressione *razionale* in β (tale, cioè, che β non compaia sotto il segno di radice) che sia un'approssimazione di β quando v è molto minore di c, cioè quando β è molto piccolo.

In particolare, cercheremo un'approssimazione del *secondo ordine* in β. Ciò significa che condurremo il calcolo mantenendo i termini che contengono β^2 e trascurando i termini che contengono β^4; per esempio, se β è uguale a 1/10, β^2 vale 10^{-2} e β^4, che è uguale a 10^{-4}, può essere trascurato in confronto a β^2.

Parliamo soltanto delle potenze pari di β perché, data la proprietà di simmetria di γ, che rimane inalterata nello scambio di β con $-\beta$, nel calcolo non possono comparire potenze dispari di β.

In un'approssimazione al secondo ordine, a un polinomio $P(\beta) = a + b\beta^2$ può sempre essere aggiunto o tolto un monomio del tipo $k\beta^4$ ottenendo un polinomio equivalente al precedente, visto che il termine $k\beta^4$ è considerato trascurabile.

Sulla base di queste premesse, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore della definizione di γ per $\sqrt{1+\beta^2}$; in tal modo otteniamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^4}} \cong \sqrt{1+\beta^2},$$

visto che $1-\beta^4$ si può considerare uguale a 1.

Ora possiamo eliminare la radice quadrata che rimane con il *metodo del completamento del quadrato*, che consiste nel notare che è possibile aggiungere a $1+\beta^2$ un termine del tipo $k\beta^4$ (cioè un termine che, essendo praticamente uguale a zero, può essere aggiunto o tolto ad arbitrio) in modo tale da ottenere il quadrato di un binomio:

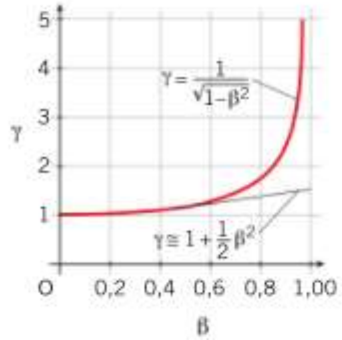
$$\gamma \cong \sqrt{1+\beta^2} \cong \sqrt{1+\beta^2+\frac{1}{4}\beta^4} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right)^2} = 1+\frac{1}{2}\beta^2.$$

Abbiamo quindi ottenuto il risultato che stavamo cercando: l'approssimazione di γ valida per piccoli valori di β è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong 1+\frac{1}{2}\beta^2.$$

Questo risultato è confermato dalla figura seguente: per valori di β fino circa al valore 0,4 il grafico rigoroso di γ (linea rossa) e quello della sua approssimazione $1+\beta^2/2$ (linea nera) risultano indistinguibili.



Negli esercizi, talvolta è utile utilizzare anche un'approssimazione razionale di $1/\gamma$. Seguendo la stessa logica usata prima otteniamo

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} \cong \sqrt{1-\beta^2+\frac{1}{4}\beta^4} =$$

$$= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right)^2} = 1-\frac{1}{2}\beta^2.$$

da cui

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} \cong 1-\frac{1}{2}\beta^2.$$

Le due relazioni trovate

$$\gamma \cong 1+\frac{1}{2}\beta^2, \quad \frac{1}{\gamma} = 1-\frac{1}{2}\beta^2$$

sono conseguenza di una proprietà generale delle potenze

$$y = (1+x)^n \simeq 1+nx$$

che è valida quando la variabile x è molto minore di 1.