Premessa

La raccolta di appunti che segue, peraltro incompleta e in continua rielaborazione, è rivolta agli studenti delle 5^e^ classi degli Istituti Professionali.

Questo strumento didattico non ha la presunzione di voler sostituire il libro di testo in adozione, ma vuol essere un sussidio di semplice comprensione e consultazione.

Per un maggiore approfondimento si rimanda, quindi, alla consultazione del libro di testo o ad altri testi specifici in materia.

Prof. Letterio Guglielmo.

"Il matematico non può sfuggire all'ansia di mostrare come la sua disciplina sia una vera arte, con una sua intrinseca bellezza".

MICHELE EMMER, La Perfezione visibile, 1991.

A mia moglie Lidia e a mia figlia Claudia.

I. Nozioni di Topologia

I.1 Intervalli

Gli intervalli non sono altro che delle tipologie di insiemi di numeri reali. I più importanti sono i cosidetti intervalli **limitati**. Dati a e $b \in R$ con $a < b$ definiamo 4 tipi di intervalli limitati:

1) *Intervallo aperto*: L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $a < x < b$ e si indica con **(a,b)**.

——a(~~~~~~~~~)b——→ R

2) *Intervallo chiuso*: L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $a \leq x \leq b$ e si indica con **[a,b]**.

——[a~~~~~~~~~b]——→ R

3) *Interv. aperto a sin.*: L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $a < x \leq b$ e si indica con **(a,b]**.

——a(~~~~~~~~~b]——→ R

4) *Interv. aperto a des.*: L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $a \leq x < b$ e si indica con **[a,b)**.

——[a~~~~~~~~~)b——→ R

Gli elementi ***a*** e ***b*** prendono il nome di ***estremi*** dell'intervallo. ***a*** rappresenta l'estremo inferiore, ***b*** quello superiore. Il numero ***b-a*** rappresenta la *misura* o *lunghezza* dell'intervallo; i numeri ***(b-a)/2*** e ***(a+b)/2*** sono rispettivamente il *raggio* e il *centro* dell'intervallo.

Soffermiamoci ora, brevemente, sugli intervalli **illimitati** in ***R***:

1) L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $x \leq a$ si indica con **(-∞,a]** ed è un intervallo illimitato.

….~~~~~~~~~~~~~a]——→ R

2) L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $x < a$ si indica con **(-∞,a)** ed è un intervallo illimitato.

….~~~~~~~~~~~~~)a——→ R

3) L'insieme di tutti i numeri reali x tali che $x \geq a$ si indica con **[a,+∞)** ed è un intervallo illimitato.

———[a~~~~~~~~~~~~~~~~~~→ R

4) L'insieme di tutti i numeri reali ***x*** tali che ***x > a*** si indica con **(a,+∞)** ed è un intervallo illimitato.

———a(~~~~~~~~~~~~~~~~~→ R

I.2 Maggiorante e Minorante

Se ***E*** è un insieme non vuoto di ***R***, diremo che:

- ***E*** è *limitato superiormente* se esiste un numero ***b*** non minore di tutti gli elementi di ***E***, ossia quando per ogni $x \in E : x \le b$. Si dice allora che ***b*** è il **maggiorante di *E***.
- ***E*** è *limitato inferiormente* quando esiste un numero reale ***a*** tale che per ogni $x \in E : x \ge a$. Si dice allora che ***a*** è il **minorante di *E***.

I.3 Intorno di un numero o di un punto

La definizione di intorno, in generale, allude ad una totalità di punti vicini, ossia poco distanti dal punto dato.

❋ Si chiama ***Intorno completo*** di un numero reale (o di un punto) ***c*** un qualsiasi intervallo aperto che contenga ***c***. *Es: Un intorno completo del numero 7 è dato dall'intervallo aperto (-3,12)* (a) *oppure dall'intervallo (1,9)* (b).

a) ——-3(~~~~~~7~~~)12——→ R   b) ——1(~~~~~~~7~~)9——→ R

In particolare, gli intervalli aperti di centro ***c***, oltre ad essere naturalmente intorni di ***c*** prendono anche il nome di ***intorni circolari*** . Se indichiamo con δ la misura del raggio dell'intorno circolare, allora tale intorno si indicherà nel modo seguente:

$$(c - \delta, c + \delta)$$

——c-δ(~~~~~c~~~~~)c+δ——→ R

❋ Si chiama ***Intorno destro*** di un numero reale (o di un punto) ***c*** ogni intervallo *aperto a destra* che abbia ***c*** come <u>estremo inferiore</u>, ***Intorno sinistro*** ogni intervallo *aperto a sinistra* che abbia ***c*** come <u>estremo superiore</u>.

——[c~~~~~~~~~)———→ R   *Intorno destro di **c**.*

——(~~~~~~~~~c]——→ R *Intorno sinistro di **c**.*

I.4 Punto di accumulazione

Se ***E*** è un sottoinsieme di ***R*** e ***c*** $\in$ ***R*** si dice che ***c*** è **punto di accumulazione** di ***E*** se in ogni intorno di ***c*** cadono infiniti punti di ***E***. Invece un punto ***c*** appartenente a ***R*** ma che non sia di accumulazione si chiama **punto isolato**.

——[~~~~~~~~(~c~)~~~]^{E}——→ R ***c** è punto di acc. di **E**.*

——[~~~~~~~~~~]^{E}—(~c~)——→ R ***c** è punto isolato.*

II. Funzioni Reali di una variabile reale

II.1 Definizione, Dominio e Codominio

*Se **A** e **B** sono due sottoinsiemi non vuoti di **R**, si chiama <u>funzione</u> di **A** in **B** una qualsiasi legge che fa corrispondere ad ogni elemento **x**∈**A** un e un solo elemento **y**∈**B**.*

Per indicare che ***f*** è una funzione di ***A*** in ***B*** si scrive:

f:A→B *oppure riferendosi agli elementi* ***y=f(x)***

La lettera ***x*** si chiama variabile indipendente o argomento della funzione, la lettera ***y*** invece prende il nome di variabile dipendente. Poiché, come abbiamo detto in precedenza, ***A*** e ***B*** sono due sottoinsiemi dell'insieme ***R*** dei numeri reali, la funzione ***f*** precedentemente descritta prende il nome di <u>*Funzione reale di una variabile reale.*</u>

L'insieme ***A*** dei valori ***x*** per i quali esiste il corrispondente valore delle ***y*** si dice <u>*Insieme o Campo di esistenza*</u> o <u>*Dominio*</u> della funzione. L'insieme ***B=f(A)*** è detto invece <u>*Codominio*</u>.

II.2 Tipologie di Funzioni Reali

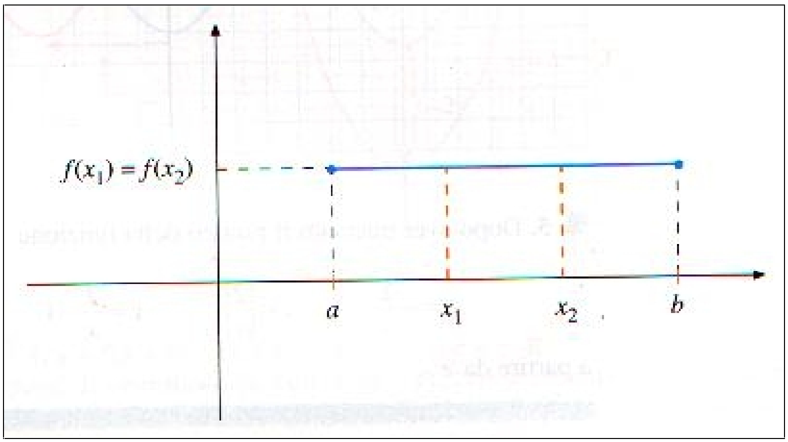
1) F. Suriettiva:	***F:A→B*** è *suriettiva* ⇔ ***f(A)=B*** ossia, quando ogni elemento di ***B*** è l'immagine di qualche elemento di ***A.***
2) F. Iniettiva:	***f:A→B*** è *iniettiva* se porta punti distinti in punti distinti.
3) F. Uguali:	Le due funzioni ***f:A→B*** e ***g:C→D*** sono *uguali* ⇔ ***A=C**, **B=D** e per qualunque **x**∈**A:f(x)=g(x)***.
4) F. Biiettiva:	Una funzione è *biiettiva* se è **sia iniettiva che suriettiva**.
5) F. Algebrica e Trascendente:	Una funzione si dice *algebrica* se il legame tra le due variabili ***x*** e ***y*** è esprimibile mediante un'equazione algebrica di grado qualsiasi. Esempi di *funzioni algebriche* sono: 1. Le <u>*Funzioni razionali intere*</u>; es: $\boxed{y = 3x^5 + 5x^2 - 1}$; 2. Le <u>*Funzioni razionali fratte*</u>; es: $\boxed{y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 2x + 7}}$;

	3. Le *Funzioni irrazionali intere e fratte*; es: $\boxed{y = \sqrt{2x^2+5}}$. Una Funzione che non sia *algebrica* si dice *trascendente*. Sono esempi di funzioni *trascendenti*: 1. Le *Funzioni Trigonometriche*; es: $\boxed{y = \operatorname{sen} x}$; 2. Le *Funzioni Logaritmiche*; es: $\boxed{y = \ln x}$; 3. Le *Funzioni Esponenziali*; es: $\boxed{y = a^x \quad (\text{con a} > 0)}$.
6) F. Periodiche:	***Y=f(x)*** è periodica di periodo T>0 se ***f(x+T)=f(x)***. Sono esempi notevoli di funzioni periodiche le funzioni trigonometriche.
7) F. Pari e Dispari:	La funzione reale ***y=f(x)*** è: a) *Pari:* *se* *f(-x)=f(x)* *Es:* $y=x^2$. b) *Dispari:* *se* *f(-x)=-f(x)* *Es:* $y=\sqrt[3]{x}$

II.3 Funzioni monotòne

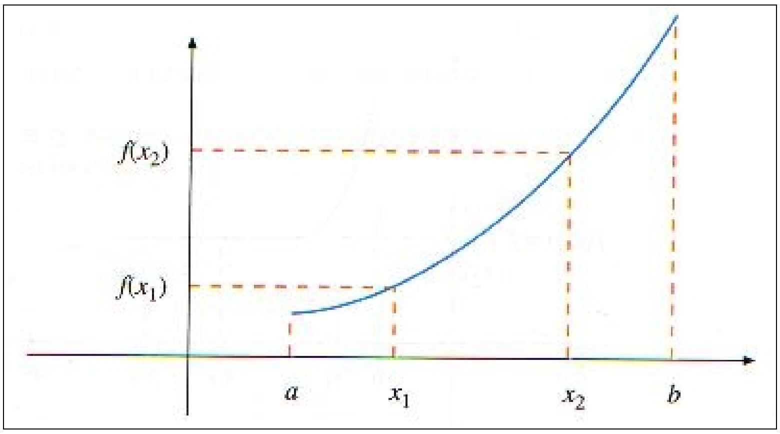
Se ***f(x)*** è una funzione definita nell'intervallo chiuso **[a, b]** diremo che ***f(x)*** è:

1) **Costante** in **[a, b]** se: $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, graficamente:



Es: ***y=sen²x+cos²x*** **-** ***y=1*** *(Valore costante).*

2) **Crescente** (strettamente) in **[a, b]** se: $\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, graficamente:

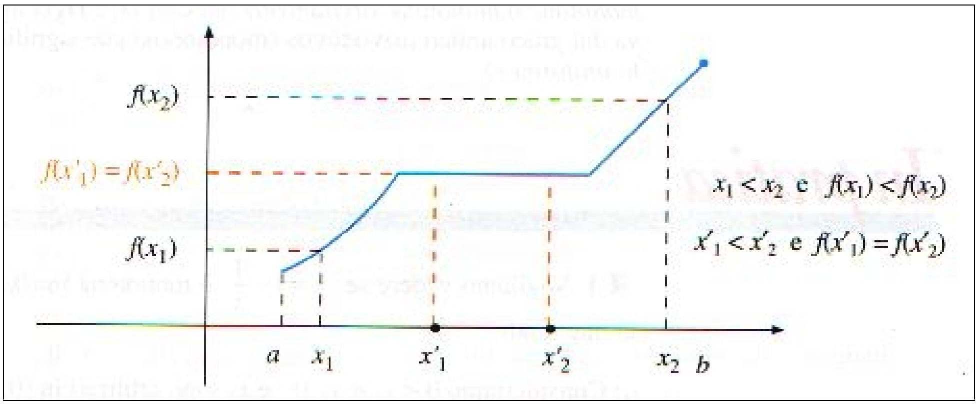


Il grafico della funzione crescente “sale” se si osserva da sinistra verso destra.

3) **Non crescente** (o crescente debolmente) in **[a, b]** se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2),$$

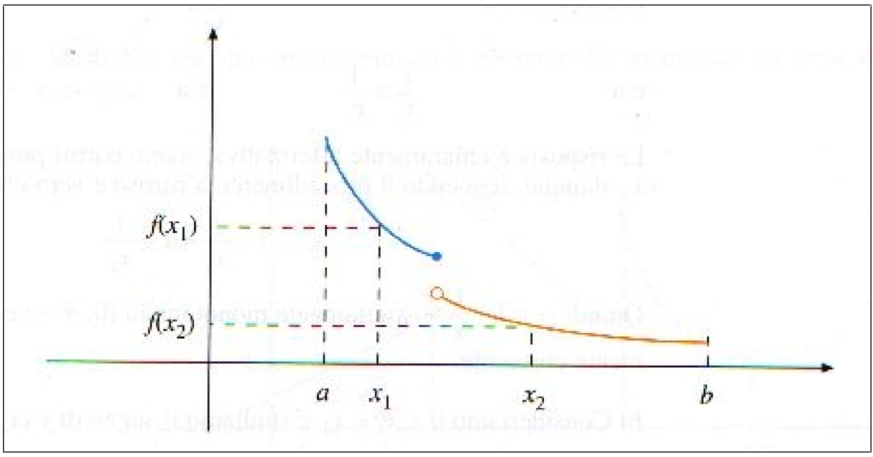
graficamente:



Il grafico di una funzione non crescente può “salire” o “stabilizzarsi”.

4) **Decrescente** (strettamente) in **[a, b]** se: $\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

graficamente:

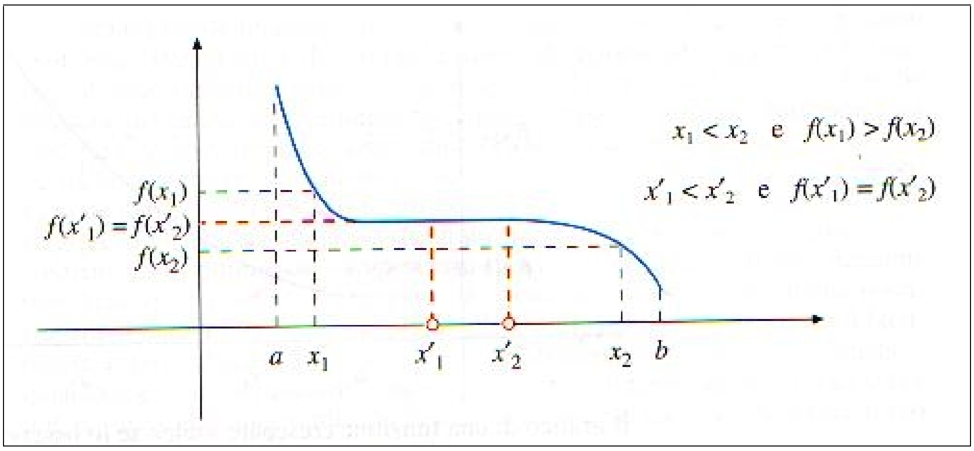


Il grafico della funzione decrescente "scende" se si osserva da sinistra verso destra.

5) **Non decrescente** (o decrescente debolmente) in **[a, b]** se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b],\ \text{con}\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,,$$

graficamente:



Il grafico di una funzione non decrescente può "scendere" o "stabilizzarsi".

Le funzioni che godono di una delle suddette proprietà si dicono ***monotone***. L'aggettivo monotòno deriva dal greco antico *monotònos* e significa "*di tono o andamento uniforme*".

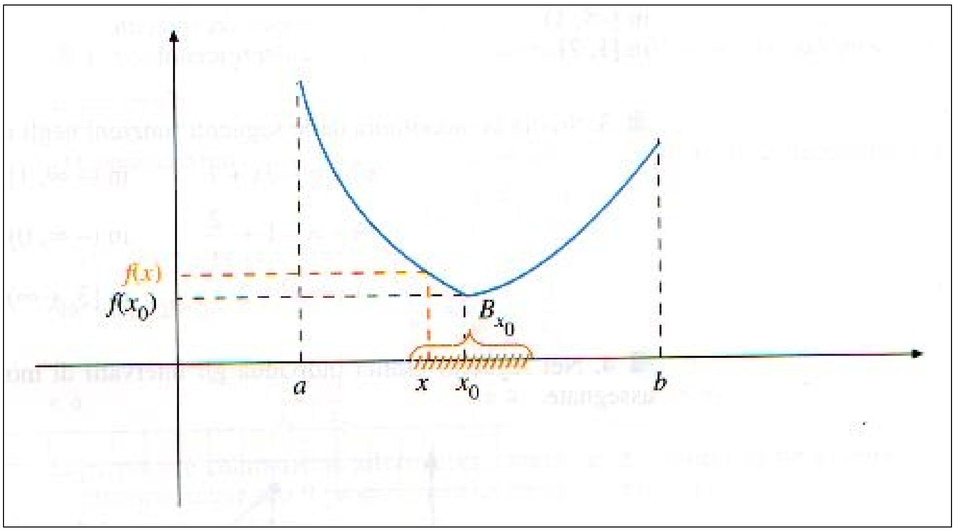
II.4 Punti estremanti di una funzione.

In alcuni casi è molto importante stabilire se, in un certo intervallo, una funzione assume un valore "*più grande*" o "*più piccolo*" di tutti gli altri.

Se ***f(x)*** è una funzione definita nell'intervallo chiuso **[a, b]** e sia $x_0 \in [a, b]$ (ossia un punto interno all'intervallo di definizione). Diremo che:

1) x_0 è un punto di ***minimo relativo*** per ***f(x)*** in **[a, b]** se esiste un intorno circolare **B** di centro x_0 (ossia B_{x_0}), tutto contenuto in **[a, b]**, tale che comunque si scelga un ***x*** appartenente a B_{x_0}, ***f(x)*** è maggiore o uguale di $f(x_0)$; in simboli:

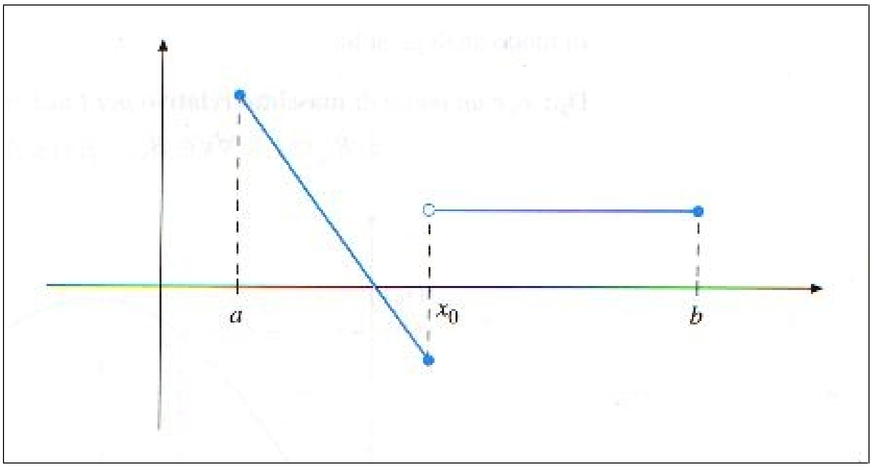
$$\exists B_{x_0} \subset [a,b] : \forall x \in B_{x_0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)\,;$$ graficamente:



Un punto di minimo relativo, non può cadere in uno degli estremi dell'intervallo perché, in tal caso, sarebbe impossibile determinare un intorno circolare **B** di centro x_0 (ossia B_{x_0}), tutto contenuto in **[a, b]**.

2) x_0 è un punto di ***minimo assoluto*** per ***f(x)*** in **[a, b]** se comunque si scelga un ***x*** appartenente a **[a, b]**, ***f(x)*** è maggiore o uguale di $f(x_0)$; in simboli:

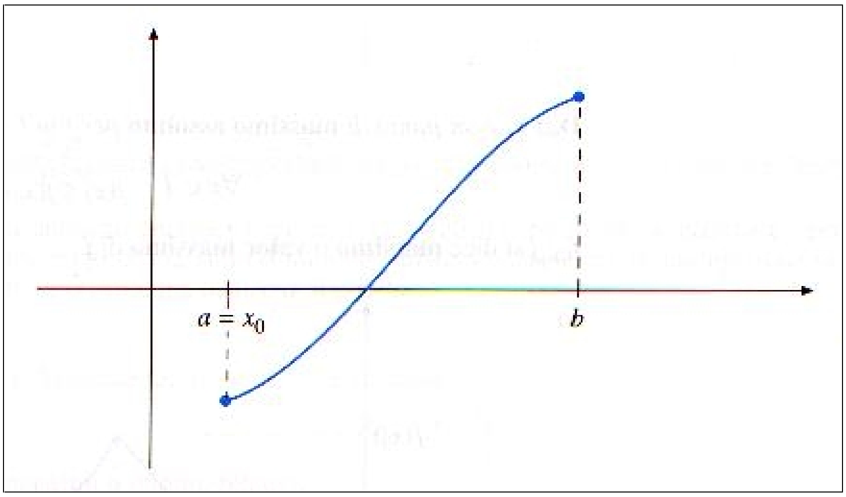
$\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$; graficamente:



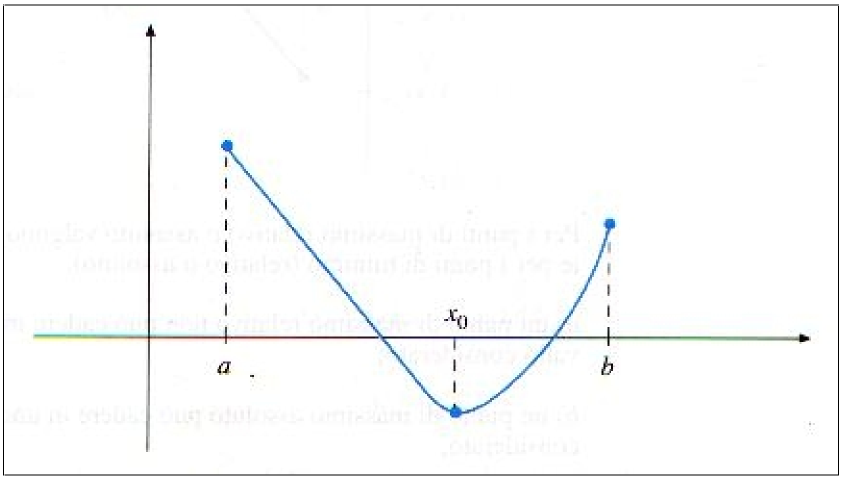
$f(x_0)$ si dice **minimo** o **valore minimo** di ***f(x)***.

I punti di minimo assoluto possono anche cadere negli estremi dell'intervallo considerato e, se cadono all'interno, possono anche essere punti di minimo relativo. I grafici seguenti illustrano queste possibilità:

a) $x_0 = a$ *è un punto di minimo assoluto, ma non è di minimo relativo*:

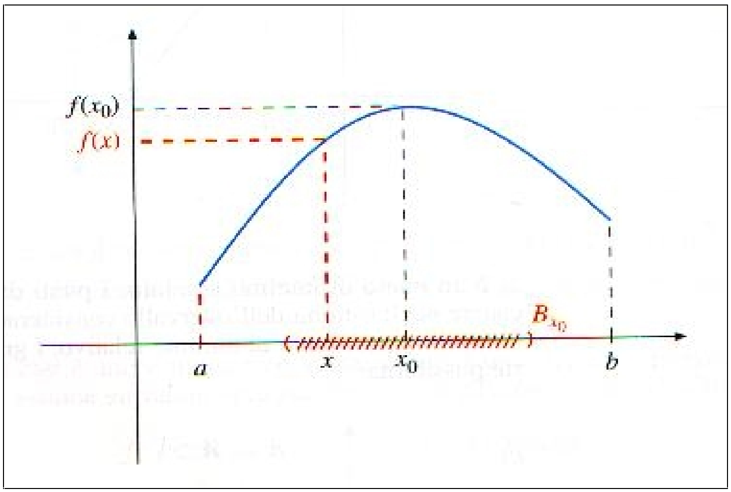


*b) **x_0** è un punto di minimo assoluto e anche di minimo relativo*:



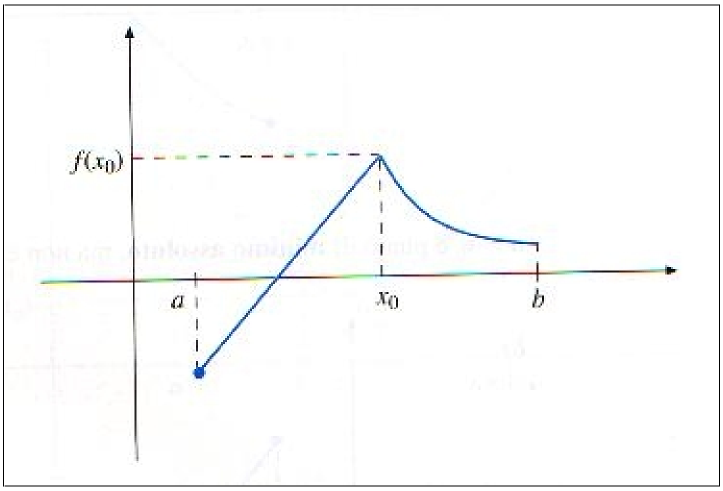
3) ***x_0*** è un punto di ***massimo relativo*** per ***f(x)*** in **[a, b]** se esiste un intorno circolare **B** di centro ***x_0*** (ossia **B_{x_0}**), tutto contenuto in **[a, b]**, tale che comunque si scelga un ***x*** appartenente a **B_{x_0}**, ***f(x)*** è minore o uguale di ***f(x_0)***; in simboli:

$\exists B_{x_0} \subset [a,b] : \forall x \in B_{x_0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$; graficamente:



4) x_0 è un punto di ***massimo assoluto*** per ***f(x)*** in **[a, b]** se comunque si scelga un ***x*** appartenente a **[a, b]**, ***f(x)*** è minore o uguale di ***$f(x_0)$***; in simboli:

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$; graficamente:



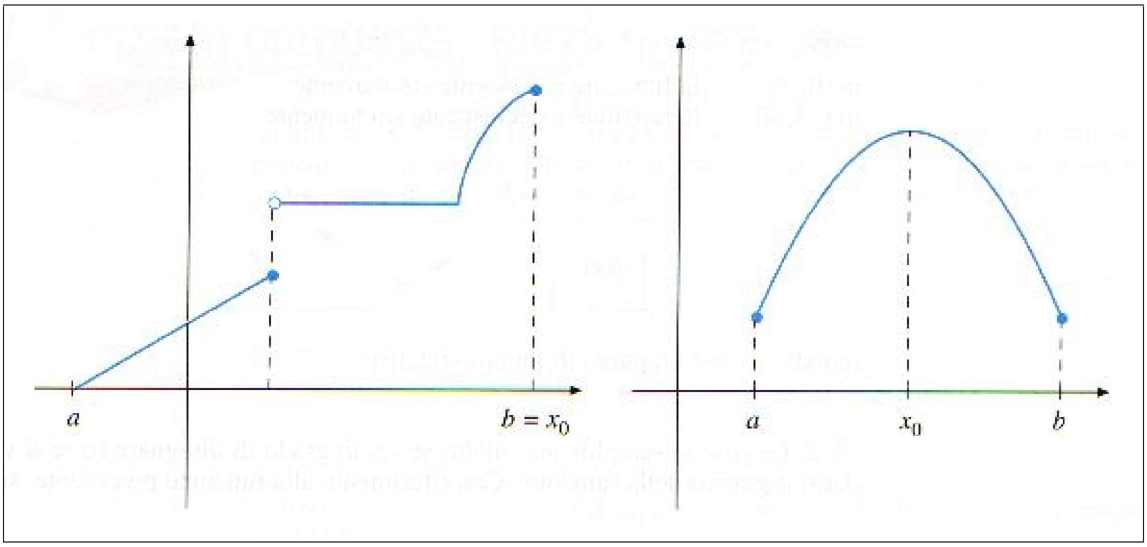
$f(x_0)$ si dice **massimo** o **valore massimo** di ***f(x)***.

Per i punti di massimo relativo e assoluto valgono le analoghe considerazioni fatte per i punti di minimo (relativo e assoluto):

a) Un punto di massimo relativo *non può cadere* in uno degli estremi dell'intervallo considerato;

b) Un punto di massimo assoluto *può cadere* in uno degli estremi dell'intervallo considerato;

c) Un punto di massimo relativo può essere anche un punto di massimo assoluto.



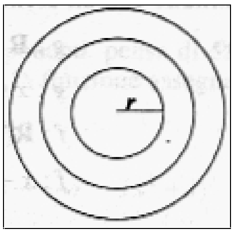
I punti di massimo o minimo (relativo e assoluto) sono anche detti ***punti estremanti*** della funzione ***f(x)***.

II.5 Funzione Composta e Funzione Inversa

➯ Per introdurre il concetto di Funzione Composta è comodo ragionare su un esempio:

Un bidone di pittura perde e sul pavimento si forma una pozzanghera la cui area aumenta con il passare del tempo: tale area è funzione del tempo. Supponiamo ora che la pozza sia un cerchio perfetto in modo da poterne calcolare l'area A:

$A=\pi \cdot r^2$



è altresì evidente che anche il raggio r è funzione del tempo t, per esempio:

$$r = 1 + 2t$$

allora

$$A = \pi (1 + 2t)^2.$$

Si dice allora che A è una ***funzione composta*** *o funzione di funzione:*

$$A = f(g(t)) = \pi(g(t))^2 = \pi(1+2t)^2$$

g è la funzione interna ed è quella da calcolare per prima, f è la funzione esterna e si calcola per seconda.

Cerchiamo ora di precisare i concetti presentati nell'esempio: concetti, d'altra parte, che dovrebbero essere già noti. Siano:

$$g: A \to B \qquad \text{e} \qquad f: B \to C$$

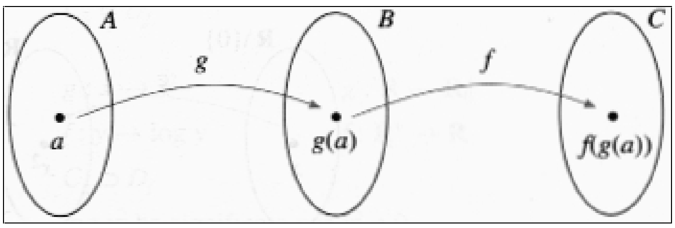
ove ***A***, ***B***, ***C***, sono tre insiemi *e **f**, **g*** due funzioni, allora esiste una funzione

$$h: A \to C$$

che associa a ogni elemento di ***A*** uno e un solo elemento di ***C*** in tal modo:

$$\forall a \in A \Rightarrow h(a) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

in cui ***h*** è la *funzione composta,* ***f(g(a))*** si legge *f di g di a,* ***(f ° g) (a)*** si legge *g composto con f di a* e si scrive da destra a sinistra, cioè prima *g* e poi *f*: in tale scrittura la funzione che compare a sinistra è la *funzione esterna.*



In generale, per comporre due funzioni *f* e *g*, occorre che il codominio C_g di *g* coincida con il dominio D_f di *f*. Tuttavia la composizione di funzioni ha significato anche quando si supponga soltanto che:

$$C_g \subseteq D_f \qquad \textit{oppure} \qquad C_g \supseteq D_f.$$

Proviamo ora a comporre due funzioni. Siano:

$$g(x) = 2x + x^3 \qquad \text{e} \qquad f(x) = tgx$$

si avrà:

$$h(x) = f(g(x)) = tg(2x + x^3)\,.$$

☯ ☯ ☯

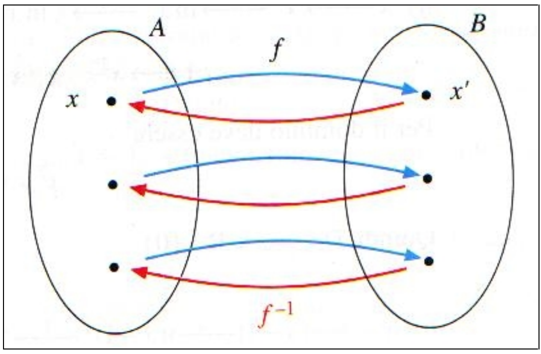
➥ Qualora una funzione

$$\boldsymbol{f: A \to B}$$
$$\boldsymbol{x \to x'}$$

sia biiettiva, ossia rappresenti una *corrispondenza biunivoca* (cioè a ogni elemento di ***A*** corrisponde uno e un solo elemento di ***B*** e viceversa) si può parlare di ***funzione inversa*** ***(f^{-1})*** di ***f*** cosI definita:

$$\boldsymbol{f^{-1}: B \to A}$$
$$\boldsymbol{x' \to x}$$

cioè a ogni elemento di ***B*** si associa l'elemento di ***A*** che ha come corrispondente proprio quell'elemento.



Evidentemente si ha:

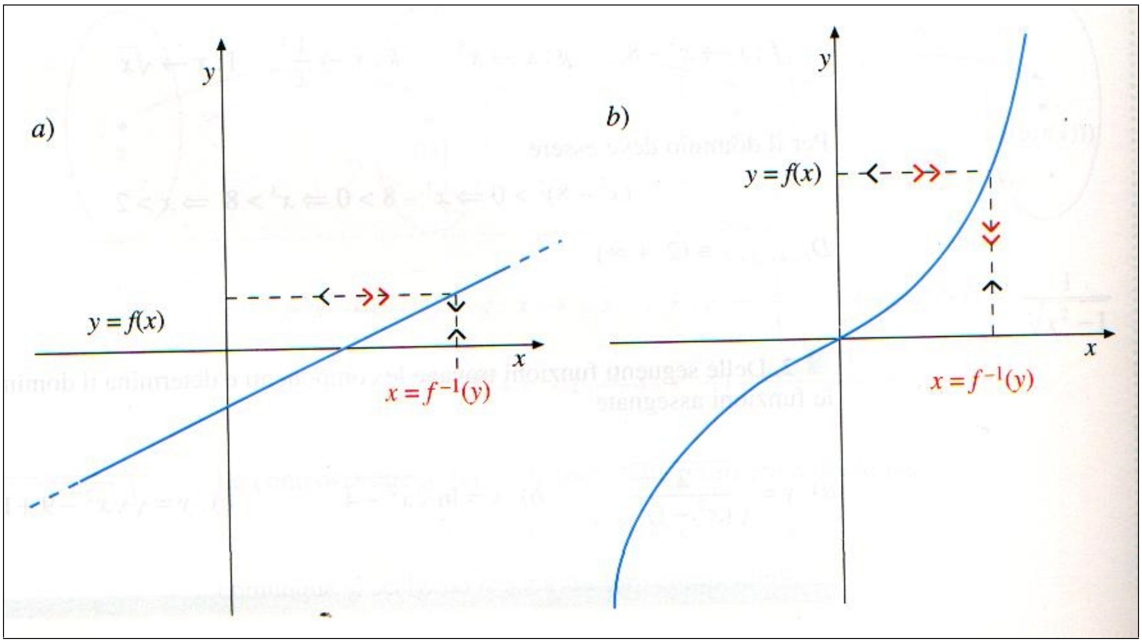
$$\forall x \in A\,, \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,; \qquad\qquad \forall x' \in B\,, \qquad (f \circ f^{-1})(x') = x'$$

in generale

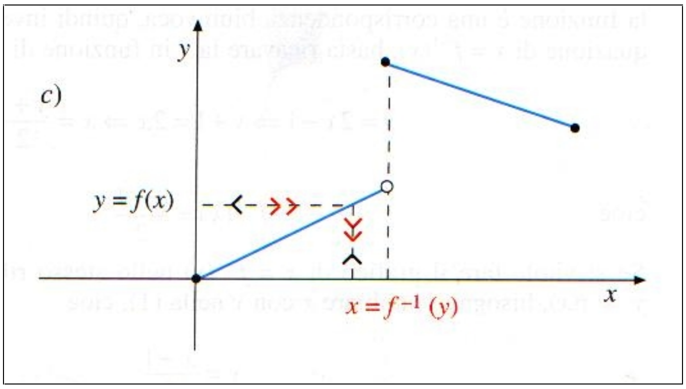
$$f^{-1} \circ f = I_A \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} = I_A$$

ove I_A è l'identità in *A* e I_B è l'identità in *B.*

E' abbastanza difficile stabilire se una funzione *f* sia *invertibile,* cioè se ammetta funzione inversa, perché è in genere difficile provare che una funzione è una corrispondenza biunivoca, a meno che non se ne conosca il grafico; per esempio:



I grafici a), b) e c) sono grafici di corrispondenze biunivoche e quindi le funzioni rappresentate sono invertibili.



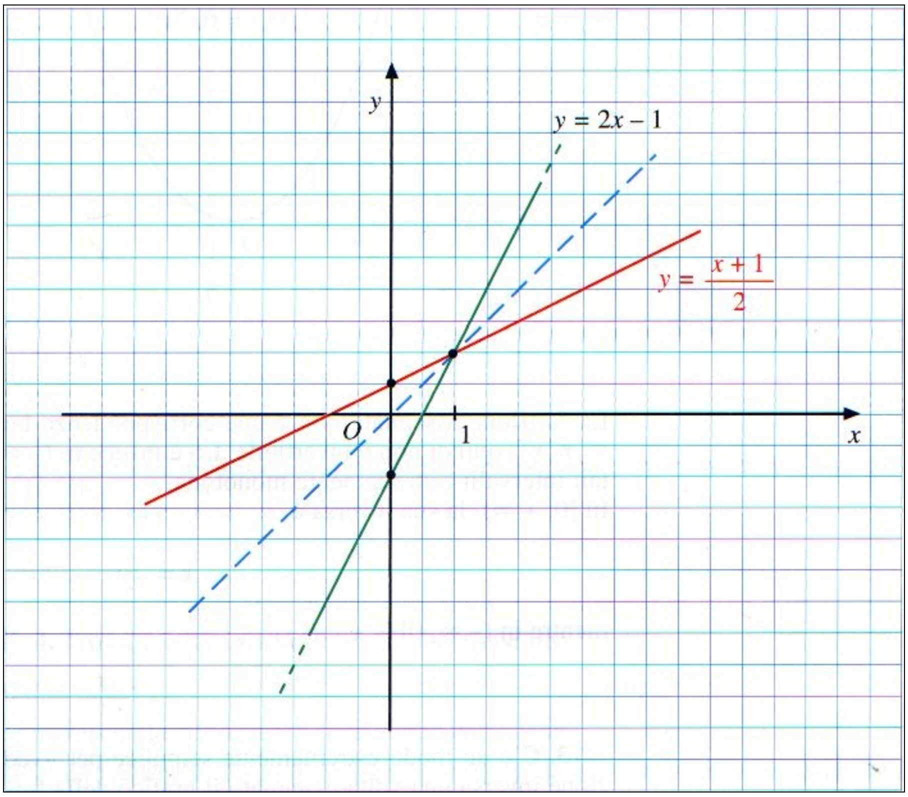
Dai grafici a) e b) si può intuire che *se una funzione è strettamente monotona allora è sicuramente una corrispondenza biunivoca e quindi è invertibile*, mentre il grafico c) fa vedere come una funzione possa essere invertibile senza essere monotona.

Vediamo ora come si fa a ricavare la funzione inversa, analizzando il “solito” ma utile esempio.

Supponiamo di avere la funzione:

$$y = 2x + 1.$$

Verifichiamo per prima cosa che la funzione è invertibile. Per far ciò, ci è di conforto il grafico, che data la tipologia della funzione, è facile da disegnare:



E' facile verificare che la funzione è una corrispondenza biunivoca, quindi è invertibile.

Per trovare l'equazione di $x = f^{-1}(y)$, basta ricavare la *x* in funzione di *y*:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

cioè

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

il cui grafico è riportato nello stesso riferimento cartesiano di $y = f(x)$ (per far ciò è necessario scambiare la x con la y, ossia considerare la funzione $y = \frac{x+1}{2}$).

Con riferimento alla funzione composta, è facile dimostrare, a questo punto, che:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x; \qquad \text{e} \qquad (f \circ f^{-1})(y) = 2\left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 = y$$

come precedentemente affermato.

II.6 Esempi di determinazione dell'Insieme di esistenza di una Funzione

Come è stato detto, il *Campo di esistenza* o *Dominio* di una funzione, è l'insieme dei valori della variabile indipendente *x*, per i quali hanno significato le operazioni che si devono eseguire su di essa per avere il valore corrispondente della *y*. Seguono ora, una serie di esempi di funzioni di vario genere con il relativo *Campo di esistenza*:

II.6.1 Campo di Esistenza di Funzioni algebriche

Tipologia di funzione	***C.E.***
Funzione razionale intera:	
$\boxed{y = x^3 + 1}$	Il C.E. è costituito dall'insieme $\Re$ di tutti i numeri reali. Infatti le operazioni da eseguire sul valore dato alla x sono sempre possibili, qualunque sia questo valore.
Funzione razionale fratta:	
$\boxed{y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}}$	Ricordando che in aritmetica non ha significato dividere un numero per lo zero, la ricerca del campo di esistenza di funzioni fratte porta a scartare tutti quei valori della ***x*** che annullano il denominatore. Nel caso in questione sarà: $\mathbf{x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2}$.
Funzione irrazionale:	
1. $\boxed{y = \sqrt{x^2 - 1}}$ *2.* $\boxed{y = \sqrt[3]{x^3 - 3}}$ *3.* $\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{2x}{x - 2}}}$	Ricordando che nell'insieme dei reali non è possibile estrarre la radice quadrata di un numero negativo, il campo di esistenza della *funzione n°1* è dato da tutti quei valori che rendono positivo o nullo il radicando. Nel caso in questione sarà: $\mathbf{x^2 - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -1 \ ; \ x \geq 1}$. La *funzione n°2*, invece, è irrazionale intera di indice dispari. Poiché la radice di indice dispari è sempre estraibile a prescindere dal segno del radicando, si può quindi affermare che il C.E. di una simile funzione è costituito dall'insieme $\Re$ di tutti i numeri reali. La *funzione n°3*, è irrazionale di indice dispari, perciò, come detto precedentemente non dovrebbero esserci limitazioni per il radicando; tuttavia quest'ultimo è una funzione fratta che, per esistere, deve avere il denominatore diverso da zero. Per cui sarà: $\mathbf{x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2}$.

II.6.2 Campo di Esistenza di Funzioni trascendenti

Tipologia di funzione	***C.E.***
Funzione esponenziale: $\boxed{y = 5^{\frac{x+2}{x-2}}}$	Poiché l'esponente di tale funzione è, a sua volta, una funzione fratta, il denominatore deve essere diverso da zero. ***x – 2 ≠ 0 ⇒ x ≠ 2***.
Funzione logaritmica: $\boxed{y = \log(x^2 - 5x + 6)}$	Ricordando che l'argomento di un logaritmo deve essere sempre positivo, si avrà: ***x^2 – 5x + 6 > 0 ⇒ x < 2 e x > 3***.
Funzione trigonometrica: $\boxed{y = \cos x + \frac{1}{\operatorname{sen} x}}$	La funzione in questione è trigonometrica fratta, per cui *sen x* dovrà essere diverso da zero. Perciò sarà: ***Sen x ≠ 0 ⇒ x ≠ kπ***.

Premessa

La raccolta di appunti che segue, peraltro incompleta e in continua rielaborazione, è rivolta agli studenti delle 5e classi degli Istituti Professionali.

Questo strumento didattico non ha la presunzione di voler sostituire il libro di testo in adozione, ma vuol essere un sussidio di semplice comprensione e consultazione.

Per un maggiore approfondimento si rimanda, quindi, alla consultazione del libro di testo o ad altri testi specifici in materia.

Prof. Letterio Guglielmo.

"Il matematico non può sfuggire all'ansia di mostrare come la sua disciplina sia una vera arte, con una sua intrinseca bellezza".

MICHELE EMMER, La Perfezione visibile, 1991.

IV. Limiti delle Funzioni di una variabile

IV.1 Richiami sul concetto di Valore Assoluto

Si chiama **valore assoluto** (o modulo) di un numero reale ***a*** e si scrive $|a|$, il numero così definito:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Alcune proprietà dei valori assoluti sono espresse dai seguenti teoremi, di cui si dà solo l'enunciato:

1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a=0$
2) Dati due numeri reali ***a*** e ***b*** (***b>0):***

   $|a| < b$ equivale a: $-b<a<b$

   $|a| > b$ equivale a: $a>b$, o a $a<-b$

3) Il valore assoluto della somma di due numeri reali ***a*** e ***b*** è minore o uguale alla somma dei valori assoluti dei singoli numeri; cioè***:***

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

4) Il valore assoluto della differenza dei valori assoluti di due numeri reali ***a*** e ***b***, è minore o uguale al valore assoluto della differenza dei due numeri stessi; cioè:

$$||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

5) Per due numeri reali qualunque ***a*** e ***b***. si ha:

$$|a*b| = |a|*|b|.$$

IV.2 Limite per una funzione in un punto

Immaginiamo che sia ***f(x)*** una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo chiuso **[a,b]** e sia x_0 un punto interno a tale intervallo. Il nostro scopo è quello di esaminare i valori che ***f(x)*** assume quando alla ***x*** si attribuiscono valori di **[a,b]** *prossimi* al numero x_0; in altre parole ci interessa studiare il comportamento della funzione in convenienti **intorni** del punto x_0, escluso sempre il punto x_0[1]. Ciò che si osserva, in relazione al tipo di funzione in esame, si può riassumere nei seguenti casi:

[1] Si badi bene, che il punto x_0.può appartenere o meno al Dominio della funzione f(x).

1) ***Limite finito per una funzione in un punto:*** Può accadere che attribuendo ad ***x*** valori *sufficientemente vicini* a x_0 (x_0 escluso), i corrispondenti valori della ***f(x)*** risultino *sufficientemente vicini* ad un numero ***l***; in particolare fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon>0$ piccolissimo, può darsi che sia possibile determinare un intorno completo di x_0 (che chiameremo ***H***) tale che per ogni ***x*** appartenente a quest'intorno si abbia un corrispondente ***f(x)*** che cada in un intorno di ***l*** di raggio ε (oppure potremo dire che ogni ***f(x)*** differisce, in valore assoluto, da ***l*** meno di ε, ossia $|f(x)-l|<\varepsilon$) [*Fig. 1*]. In tal caso si dirà che *la funzione **f(x)** per **x** tendente a x_0 ha per **limite** il numero **l**, e si scrive:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Per quanto detto sopra, dalla disequazione $|f(x)-l|<\varepsilon$, applicando i teoremi sul valore assoluto si otterrà:

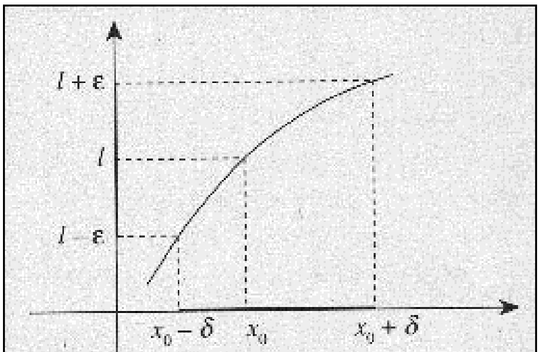


Figura 1

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon.$$

Per meglio comprendere il concetto appena introdotto, ragioniamo su un esempio concreto:

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = \frac{3x^2-8x+4}{x-2}}$$

la quale, essendo una funzione razionale fratta, esiste per ogni valore della x diverso da 2; per x=2 assume la forma $\frac{0}{0}$ *che è priva di significato.*

Diamo allora ad x dei valori sempre più prossimi a 2 (sia un po' più piccoli di 2, sia un po' più grandi) e riuniamo nelle due seguenti tabelle, alcuni dei valori corrispondenti di x e di y.

X	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,93	1,96	1,99	1,999
Y	2,5	2,8	3,1	3,4	3,7	3,79	3,88	3,97	3,997

X	2,5	2,4	2,35	2,21	2,1	2,07	2,05	2,02	2,001
Y	5,5	5,2	5,05	4,63	4,3	4,21	4,15	4,06	4,003

Si vede da queste due tabelle che quanto più alla x si attribuiscono valori vicini a 2, e, si badi bene, sia un po' più piccoli di 2, sia un po' più grandi, tanto più i corrispondenti valori della y si avvicinano al numero 4.

Tutto ciò, si esprime brevemente dicendo che, per x tendente a 2, la funzione in esame ha per limite 4.

<u>Esercizio svolto:</u> Verificare che risulta $\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$

Per provare ciò, dobbiamo vedere se, fissato un numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, la disequazione:

$|3x+1-7| < \varepsilon$ *che si può anche scrivere* $|3x-6| < \varepsilon$

sia soddisfatta per tutti i valori della x che formano un intorno completo del punto $x_0=2$. Applicando i toremi sul valore assoluto, otteniamo:

$6-\varepsilon < 3x < 6+\varepsilon$ *da cui* $2-\varepsilon/3 < x < 2+\varepsilon/3$

scrittura, quest'ultima, che equivale alla definizione di un intorno completo del punto $x_0=2$.

<u>*1.1) Limite destro e limite sinistro di una funzione:*</u> Può accadere che fissato arbitrariamente ε sia possibile determinare non già un intorno completo di x_0 ma soltanto un *intorno destro* o un *intorno sinistro* tale che per *qualunque* ***x*** *appartenente a un siffatto intorno* tutti gli ***f(x)*** cadano in un intorno di ***l*** di raggio ε. In tal caso ***l*** prenderà il nome di *limite destro o di limite sinistro* e si scriverà rispettivamente:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = l$$

2) ***Limite infinito per una funzione in un punto:*** Può accadere invece che attribuendo ad ***x*** valori *sufficientemente vicini* a x_0 (x_0 escluso), i corrispondenti valori della ***f(x)*** (presi in valore assoluto) risultino via via *sempre più grandi*. In particolare, fissato arbitrariamente un numero positivo ***M*** grande a nostro piacere, può darsi che sia possibile determinare in corrispondenza a tale numero un intorno completo ***H*** di x_0, tale che ogni ***x*** appartenente a quest'intorno, x_0 escluso, i valori ***f(x)*** che la funzione assume risultino, in valore assoluto, tutti maggiori di ***M*** (ossia, esprimendoci in termini matematici, scriveremo $|f(x)| > M$) [*Fig. 2*].

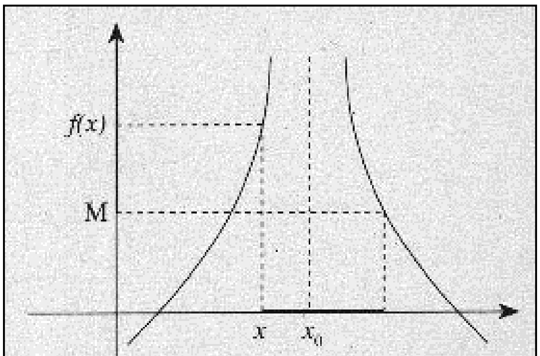


Figura 2

In tal caso si dirà che *la funzione* ***f(x)*** *per* ***x*** *tendente a* x_0 (finito) *ha* ***limite infinito****, e si scrive:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Per quanto detto al paragrafo ***IV.1*** la soluzione della disequazione |***f(x)***|>**M**, sarà data dalla risoluzione del sistema[2]:

$$|f(x)| > M = \quad \begin{cases} f(x) > M \\ f(x) > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(x) < -M \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Per meglio comprendere il concetto appena introdotto, ragioniamo, ancora una volta, su un esempio concreto:

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = \frac{1}{x-1}}$$

la quale, essendo una funzione razionale fratta, esiste per ogni valore della x diverso da 1; per x=1 assume la forma $\frac{1}{0}$ *che è priva di significato.*

Diamo allora ad x dei valori sempre più prossimi a 1 (sia un po' più piccoli di 1, sia un po' più grandi) e riuniamo nelle due seguenti tabelle, alcuni dei valori corrispondenti di x e di y.

X	1,3	1,2	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	…...
Y	3,33..	5	10	100	1000	10000	100000	…….

X	0,7	0,8	0,9	0,95	0,997	0,9999	0,99999	…...
Y	-3,33..	-5	-10	-20	-333,33..	-10000	-100000	…….

Osserviamo che, questa funzione per valori della x più piccoli di 1 assume valori negativi, mentre per valori della x maggiori di 1 assume valori positivi.

Tuttavia, se consideriamo questi valori in valore assoluto, allora è facile vedere che essi diventano sempre più grandi, man mano che alla x attribuiamo valori che vanno sempre più avvicinandosi a 1.

*Tutto ciò, si esprime brevemente dicendo che, per **x** tendente a **1**, la funzione in esame ha per limite **infinito (∞)**.*

<u>*Esercizio svolto:*</u> Verificare che risulta $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Per provare ciò, dobbiamo vedere se, fissato un numero positivo ***M*** grande a piacere, la disequazione:

---

[2] Ciò poiché: $|f(x)| = \prec \begin{matrix} f(x) & \text{per} & \text{f(x)} > 0 \\ -f(x) & \text{per} & \text{f(x)} < 0 \end{matrix}$

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > M$$

sia soddisfatta per tutti i valori della ***x*** che formano un intorno completo del punto ***x_0=1***. Applicando i teoremi sul valore assoluto, otteniamo i due sistemi:

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > M = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} > M \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} < -M \\ \dfrac{1}{x-1} < 0 \end{cases}.$$

Risolvendo il <u>primo sistema</u> si ha (trasportando M al primo membro):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - M > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \text{Si calcola poi il m.c.m. e si ottiene} \quad \begin{cases} \dfrac{1-M(x-1)}{x-1} > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases}$$

Ci si sofferma poi sulla seconda disequazione. Affinchè il quoziente fra 1 e (x-1) sia maggiore di zero è necessario, dato che 1 è una quantità ovviamente positiva, che anche (x-1) sia maggiore di zero, per cui si semplifica il sistema ponendo semplicemente:

$$\begin{cases} \dfrac{1-M(x-1)}{x-1} > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}.$$

Si passa ora all'esame della prima disequazione. Poiché (x-1) è sicuramente una quantità maggiore di zero (lo abbiamo affermato poco fa), è allora necessario che, affinchè il quoziente sia maggiore di zero, anche il numeratore sia maggiore di zero. Si scrive allora:

$$\begin{cases} 1-M(x-1) > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 1-Mx+M > 0 \\ x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -Mx > -M-1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Mx < M+1 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{infine dividendo per M ambo i membri:} \quad \begin{cases} x < 1 + \dfrac{1}{M} \\ x > 1 \end{cases}$$

scrittura, quest'ultima, che rappresenta un **intorno destro** di **1**:

————1(~~~~~~~~~~~~)1+1/M————→

Passando poi al <u>secondo sistema</u> si ha (trasportando M al primo membro):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + M < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} < 0 \end{cases} \quad \text{Si calcola poi il m.c.m. e si ottiene} \quad \begin{cases} \dfrac{1+M(x-1)}{x-1} < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} < 0 \end{cases}$$

Ci si sofferma poi sulla seconda disequazione. Affinchè il quoziente fra 1 e (x-1) sia minore di zero è necessario, dato che 1 è una quantità ovviamente positiva, che (x-1) sia minore di zero, per cui si semplifica il sistema ponendo semplicemente:

$$\begin{cases} \dfrac{1+M(x-1)}{x-1} < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}.$$

Si passa ora all'esame della prima disequazione. Poiché (x-1) è sicuramente una quantità minore di zero (lo abbiamo affermato poco fa), è allora necessario che, affinchè il quoziente sia minore di zero, il numeratore sia maggiore di zero. Si scrive allora:

$$\begin{cases} 1+M(x-1) > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 1+Mx-M > 0 \\ x < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Mx > M-1 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Infine dividendo per M ambo i membri: $\begin{cases} x > 1-\dfrac{1}{M} \\ x < 1 \end{cases}$

scrittura, quest'ultima, che rappresenta un **intorno sinistro** di **1**:

————1-1/M(~~~~~~~~~~~~~)1————→

Le due soluzioni, considerate congiuntamente, danno un intorno completo del punto **1**, ossia:

$$1-\frac{1}{M} < x < 1+\frac{1}{M}$$

————1-1/M(~~~~~~~~~~1~~~~~~~~~~)1+1/M————→

Poiché abbiamo ricavato un **intorno completo** del punto **1** abbiamo dimostrato che **il limite della funzione è ∞.**

IV.3 Limite per una funzione all'infinito

Oltre che studiare il comportamento della funzione per ***x*** tendente a un determinato valore finito x_0 (*ossia* in convenienti **intorni** del punto x_0) è sicuramente interessante vedere ciò che accade al tendere di ***x*** a valori sempre più grandi. Ciò che si osserva, in relazione al tipo di funzione in esame, si può riassumere nei seguenti casi:

1) ***Limite finito per una funzione all'infinito:*** Può accadere che attribuendo ad ***x*** valori, sia positivi che negativi, sempre più grandi in valore assoluto, i corrispondenti valori della ***f(x)*** risultino *sufficientemente vicini* ad un numero ***l***; in particolare fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon>0$ piccolissimo, può darsi che sia possibile determinare un numero ***N>0*** tale che per ogni valore di ***x*** in valore assoluto maggiore di ***N*** ($|x|>N$), si abbia un corrispondente ***f(x)*** che cada in un intorno di ***l*** di raggio ε (oppure potremo dire che ogni ***f(x)*** differisce, in valore assoluto, da ***l*** meno di ε, ossia $|f(x)-l|<\varepsilon$ per ogni $|x|>N$) [*Fig. 3*]. In tal caso si dirà che *la funzione **f(x)** per **x** tendente a infinito ha per **limite** il numero **l**, e si scrive:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

Per quanto detto sopra, dalla disequazione $|f(x)-l|<\varepsilon$, applicando i teoremi sul valore assoluto si otterrà:

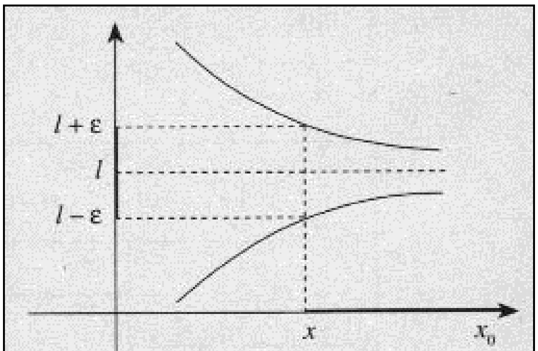


Figura 3

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon.$$

Se la disequazione è soddisfatta soltanto per ***x>N***, oppure soltanto per ***x<-N***, allora si dice che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

Per meglio comprendere il concetto appena introdotto, ragioniamo su un esempio concreto:

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = \frac{x+1}{x}}$$

Diamo ad x dei valori, sia positivi che negativi, sempre più grandi in valore assoluto. Riuniamo nelle due seguenti tabelle, alcuni dei valori corrispondenti di x e di y.

X	5	10	25	100	1500	10000	…...
Y	1,2	1,1	1,04	1,01	1,0006…	1,0001	…….

X	-5	-10	-25	-100	-1500	-10000	…...
Y	0,8	0,9	0,96	0,99	0,9993…	0,9999	…….

*Osserviamo che, questa funzione al crescere in valore assoluto della **x**, assume valori sempre più prossimi a **1***

*Tutto ciò, si esprime brevemente dicendo che, per **x** tendente a **infinito (∞)**, la funzione in esame ha per limite il valore finito **1**.*

<u>*Esercizio svolto:*</u> Verificare che risulta $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$

Per provare ciò, dobbiamo vedere se, fissato un numero ***ε>0*** piccolo a piacere, la disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

sia soddisfatta per tutti i valori della ***x*** che risultano, in valore assoluto, maggiori di un certo numero positivo ***N*** (che dipende da *ε*).

Eliminando il valore assoluto si ha:

$$-\varepsilon<\frac{1}{x}<\varepsilon \qquad \text{che equivale a} \qquad \begin{cases}\frac{1}{x}<\varepsilon\\ \frac{1}{x}>-\varepsilon\end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases}x>\frac{1}{\varepsilon}\\ x<-\frac{1}{\varepsilon}\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

Posto $N=\frac{1}{\varepsilon}$, in effetti, la disequazione è soddisfatta quando risulta:

$$|x|>N$$

e ciò prova, che per la funzione in questione, vale quanto ipotizzato.

2) ***Limite infinito per una funzione all'infinito:*** Può accadere che attribuendo ad ***x*** valori, sia positivi che negativi, sempre più grandi in valore assoluto, i corrispondenti valori della ***f(x)*** (presi in valore assoluto) risultino via via *sempre più grandi*. In particolare, fissato arbitrariamente un numero positivo ***M*** grande a nostro piacere, può darsi che sia possibile determinare un numero ***N>0*** tale che per ogni valore di ***x*** in valore assoluto maggiore di ***N*** (|***x***|>***N***), i valori ***f(x)*** che la funzione assume risultino, in valore assoluto, tutti maggiori di ***M*** (ossia, esprimendoci in termini matematici, scriveremo |***f(x)***|>**M** per ogni |***x***|>***N***)) [*Fig. 4*].

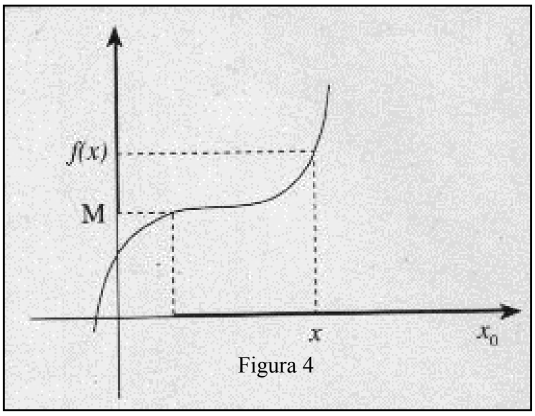


Figura 4

In tal caso si dirà che *la funzione **f(x)** per **x** tendente a **infinito (∞)** ha **limite infinito (∞)**, e si scrive:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Per quanto detto al paragrafo ***III.1*** la soluzione della disequazione $|f(x)|>M$, sarà data dalla risoluzione dei sistemi[3]:

$$|f(x)| > M = \quad \begin{cases} f(x) > M \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f(x) < -M \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Se invece per $|x|>N$ risulta sempre $f(x)>M$, oppure $f(x)<-M$, allora si dirà che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

Se invece per $x>N$ risulta sempre $|f(x)|>M$, oppure $f(x)>M$, oppure $f(x)<-M$, allora si dirà che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Se invece per $x<-N$ risulta sempre $|f(x)|>M$, oppure $f(x)>M$, oppure $f(x)<-M$, allora si dirà che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Per avere una idea più concreta di quanto affermato, basta applicare il procedimento effettuato per i casi precedenti alla funzione

$$\boxed{y = 5x^3 - 1}$$

*e calcolarne il limite per **x** tendente a **infinito (∞)**.*

IV.4 Teoremi fondamentali sui Limiti

In questo paragrafo sono descritti alcuni importanti teoremi sui limiti. Dei primi due (**unicità del limite e permanenza del segno**) se ne riportano solo gli enunciati, in quanto la loro dimostrazione è identica agli stessi teoremi visti per le successioni (paragrafi III.3 e III.4 della relativa dispensa). In questa sede si dimostrerà solo il **Criterio del confronto** detto anche Teorema dei due carabinieri (è facile immaginarne il perché!!!):

---

[3] Ciò perché: $|f(x)| = \prec \begin{matrix} f(x) & \text{per} & \mathrm{f(x)} > 0 \\ -f(x) & \text{per} & \mathrm{f(x)} < 0 \end{matrix}$

1. **Teorema dell'unicità del limite:**
   *Se esiste il limite della funzione **f(x)**, per **x** tendente a **x_0** tale limite è unico.*

2. **Teorema della permanenza del segno:**
   *Se per **x** tendente al numero **x_0** la funzione **f(x)** tende ad un limite **l** (finito e non nullo) esiste un intorno del punto **x_0** per ogni **x** del quale (escluso al più x_0) la funzione **f(x)** assume valori dello stesso segno del suo limite.*

3. **Criterio del confronto:**
   Se f(x), h(x) e g(x) sono tre funzioni definite nello stesso intervallo (eccettuato al più un punto x_0 di questo), e se per ogni x risulta:

   $f(x) \le h(x) \le g(x)$, *e se, inoltre, è* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$,

   allora risulta anche:

   $$\lim_{x \to x_0} h(x) = l .$$

   Dimostrazione:

   Dato che per ipotesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ *per le due funzioni varranno simultaneamente:*

   $$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

   $$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

   ma poiché per ipotesi:

   $$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

   si ha:

   $$l - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < l + \varepsilon$$

   espressione che dimostra il teorema.

IV.5 Operazioni sui Limiti

In questo paragrafo, si elencano i più importanti teoremi relativi alle operazioni sui limiti, limitandoci alla sola enunciazione di essi (per la dimostrazione, in quanto identica, si rimanda al paragrafo III.5 della dispensa sulle successioni).

Se risulta:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, con *l* e *m* numeri, allora si ha:

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$;
2. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l - m$;
3. $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$;
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$;
5. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

IV.6 Funzioni continue

Di questa tipologia di funzioni si dà la seguente definizione:

Si dice che una funzione f(x), definita in un intervallo [a,b] è continua nel punto x_0 (interno a questo intervallo) se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad [1]$$

In altre parole, la funzione *f(x)* è continua nel punto x_0 quando si verificano queste tre circostanze:

- ✓ esiste il valore della funzione nel punto x_0,
- ✓ esiste il limite della funzione per $x \to x_0$,
- ✓ il limite coincide con il valore della funzione nel punto x_0.

Se, invece della [1], vale soltanto la relazione:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

allora si dice che la funzione è *continua a destra* del punto x_0.

Analogamente, se vale soltanto la relazione:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

si dice che la funzione è *continua a sinistra* del punto x_0.

Dalla definizione di continuità e dai teoremi sui limiti precedentemente enunciati, segue il seguente Teorema:

*Se due funzioni sono continue in un punto x_0 , sono pure continue in x_0 la loro **somma**, la loro **differenza**, il loro **prodotto**, il loro **quoziente**, ammesso in quest'ultimo caso che la funzione al denominatore non si annulli in x_0.*

Per facilitare ulteriormente la comprensione di quanto espresso può essere utile il seguente esempio:

Sia data la funzione:

$$y=3x+1$$

e si voglia verificare la continuità della stessa in un punto x_0=2 appartenente all'intervallo di definizione. Per quanto affermato al punto 1. bisogna prima verificare che esista il valore della funzione nel punto x_0:

$$y = 3\cdot(2)+1 = 7$$

Da ciò si evince che il valore della funzione nel punto x_0 esiste ed è uguale a 7. Dobbiamo adesso verificare che esista il limite della stessa funzione per $x\to 2$ e che questo limite sia uguale al valore della funzione in x_0, ossia a 7:

$$\lim_{x\to 2} (3x+1) = 7$$

Per provare ciò, dobbiamo vedere se, fissato un numero $\varepsilon>0$ *piccolo a piacere, la disequazione:*

$$|3x+1-7|<\varepsilon \qquad \text{che si può anche scrivere} \qquad |3x-6|<\varepsilon$$

sia soddisfatta per tutti i valori della ***x*** *che formano un intorno completo del punto* $x_0=2$*. Applicando i toremi sul valore assoluto, otteniamo:*

$$6-\varepsilon < 3x < 6+\varepsilon \qquad \text{da cui} \qquad 2-\varepsilon/3 < x < 2+\varepsilon/3$$

scrittura, quest'ultima, che equivale alla definizione di un intorno completo del punto $x_0=2$*. Perciò abbiamo anche verificato che il limite della funzione esiste ed è uguale a 7. Si conclude affermando che la funzione* $y=3x+1$ *è continua nel punto* $x_0=2$*.*

IV.7 La Continuità delle funzioni elementari

Come abbiamo visto, se una funzione è continua, il calcolo del limite non presenta difficoltà. Per questo motivo è importante sapere quali sono le principali funzioni continue. Consideriamone alcune:

IV.7.1 Funzioni razionali:

1) Una funzione costante, *y=K (k costante)*, è continua in ogni punto; cioè $\lim_{x\to x_0} k = k$;
2) Una funzione *y=x*, è continua in ogni punto; cioè $\lim_{x\to x_0} x = x_0$;
3) Una funzione $y=x^n$ *(n intero positivo)*, è una funzione continua in ogni punto perché prodotto di funzioni continue;
4) Per lo stesso motivo di cui al punto 3), la funzione $y=Kx^n$ *(k costante)*, è una funzione continua;
5) Ogni funzione razionale intera: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, è continua per ogni valore della *x*, perché somma di funzioni continue;

6) Ogni funzione razionale fratta: $y=\frac{A(x)}{B(x)}$, con *A(x)* e *B(x)* polinomi in *x*, è continua per ogni valore della *x* che non annulla il denominatore perché quoziente di funzioni continue.

IV.7.2 Funzioni goniometriche:

1) Le funzioni *y=senx* e *y=cosx* sono continue per ogni valore della x; cioè: $\lim_{x\to x_0} senx = senx_0$ e $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;
2) La funzione $y=tgx=\frac{senx}{\cos x}$, in quanto quoziente di funzioni continue, è continua per ogni valore che non annulli il denominatore; ossia per $x\neq\pm\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

IV.7.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche:

1) La funzione $y=a^x$ *(con a>0)*, è continua per ogni valore della x, cioè risulta, qualunque sia x_0: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$;
2) La funzione $y=\log_a x$ *(con a>0 e a≠1)*, è continua per ogni valore positivo della x, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo x_0: $\lim_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0$.

IV.7.4 Funzioni potenza e Funzioni irrazionali:

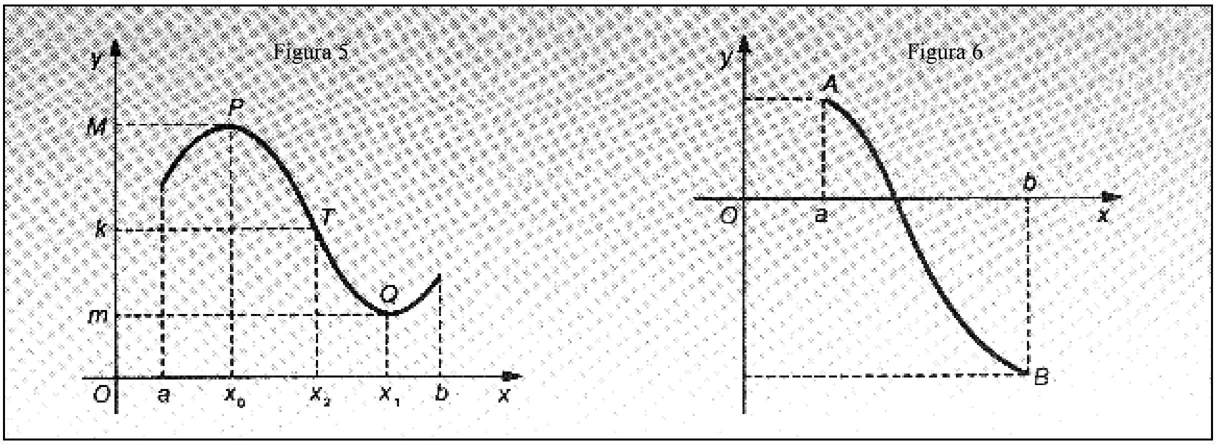
1) La funzione $y=x^\alpha$ *(con $\alpha\in\Re$)*, è continua per ogni valore della x>0, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo x_0: $\lim_{x\to x_0} x^\alpha = {x_0}^\alpha$;
3) La funzione $y=\sqrt[n]{x}$, è continua per ogni valore positivo o nullo della x, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo o nullo x_0: $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$.

IV.8 Continuità delle Funzioni in un intervallo

Sia *y=f(x)* una funzione definita in un intervallo chiuso [a, b]. *La funzione si dice continua nell'intervallo [a, b] se essa è continua in ogni punto di questo intervallo*.

L'interpretazione geometrica rende intuitivi certi risultati fondamentali sulle funzioni continue in un intervallo chiuso. Se consideriamo una curva, immagine geometrica di una funzione *y=f(x)* continua nell'intervallo chiuso [a, b], l'intuizione avverte che esisterà almeno un punto **Q** del diagramma, la cui ordinata ha un valore ***m*** non maggiore delle ordinate degli altri punti, e almeno un punto **P**, la cui ordinata ha un valore ***M*** non minore di quella degli altri punti. L'intuizione geometrica avverte ancora che una retta di equazione

$y=k$, con $m<k<M$, deve tagliare il diagramma precedente (fig. 5) almeno in un punto **T**; perciò, se indichiamo con x_0, x_1, x_2, rispettivamente le ascisse del punti **P**, **Q** e **T**, deve essere: $\boldsymbol{f(x_0)=M}$, $\boldsymbol{f(x_1)=m}$, $\boldsymbol{f(x_2)=k}$.



Così pure, se i punti A e B della curva (fig. 6), corrispondenti agli estremi $x=a$, $x=b$, si trovano rispettivamente sopra e sotto l'asse delle ascisse, allora l'intuizione avverte che la linea in discorso deve attraversare almeno una volta l'asse x tra i punti a e b. Pertanto si è condotti ad enunciare, e si potrebbe dimostrarli con tutto rigore, i seguenti teoremi:

TEOREMA DI WEIERSTRASS

*Se una funzione è continua in un intervallo **chiuso** e **limitato** [a, b] essa assume ivi il massimo assoluto e il minimo assoluto*[4].

TEOREMA DI DARBOUX-BOLZANO

*Se una funzione è continua in un intervallo **chiuso** [a, b] essa assume ogni valore compreso fra il suo minimo e il suo massimo assoluto.*

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI

*Se una funzione è continua in un intervallo **chiuso** [a, b] e se agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto, essa si annulla in almeno un punto interno all'intervallo*.

IV.9 Punti di Discontinuità per una Funzione

Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso [a, b], escluso al più un punto x_0 di questo. Se essa non è continua in x_0, il punto x_0 si dice **punto singolare** o di **discontinuità** di $f(x)$.

Vi sono diversi tipi di discontinuità, in relazione ai motivi per cui l'uguaglianza:

[4] che possono anche non essere diversi.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

non ha luogo:

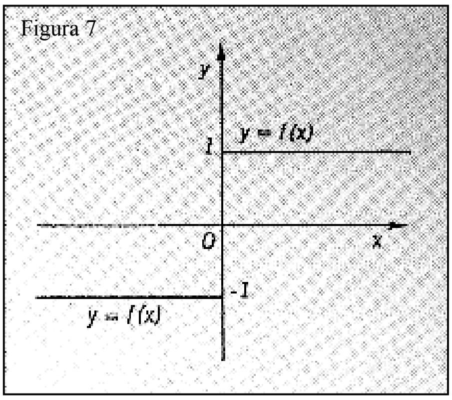
IV.9.1 Punti di Discontinuità di 1ª specie

Si dice che nel punto x_0 la funzione *f(x)* ha una discontinuità di 1ª specie, se in tale punto ***esistono e sono finiti i limiti destro e sinistro della funzione*** ma sono ***diversi tra loro***, ossia:

$$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l} \qquad \text{ed} \qquad \boxed{\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = m} \qquad \text{ma:} \qquad \boxed{l \neq m}$$

La differenza tra *l* e *m*, ossia $s = l - m$ si chiama ***salto*** della funzione *f(x)* nel punto x_0.

Per meglio comprendere il concetto esposto, può essere utile il seguente *esempio*:



Consideriamo la funzione $y = \dfrac{x}{|x|}$*, definita per tutti i valori della x≠0.*

Per valori di x<0, si ha: $\dfrac{x}{|x|} = -1$*; mentre per valori di x>o si ha:* $\dfrac{x}{|x|} = 1$*. Pertanto [Fig. 7]:*

$$\boxed{\exists \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 = l} \qquad \text{ed} \qquad \boxed{\exists \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 = m} \qquad \text{ma:} \qquad \boxed{l \neq m}$$

e quindi nel punto x=0 la funzione ha una discontinuità di 1ª specie, con salto s=2.

IV.9.2 Punti di Discontinuità di 2ª specie

Si dice che nel punto x_0 la funzione *f(x)* ha una discontinuità di 2ª specie, se in tale punto:

1) ***Non esiste il limite della funzione f(x) per x tendente a x_0***;
2) ***Non esiste o è infinito almeno uno dei due limiti laterali*** (il destro o il sinistro).

Per meglio comprendere il concetto esposto, può essere utile il seguente *esempio*:

Consideriamo la funzione $y = \dfrac{1}{x}$*, definita per tutti i valori della x≠0.*

Calcoliamone i limiti laterali (destro e sinistro) per x tendente a 0. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Pertanto, poiché rientriamo in uno dei casi previsti, possiamo affermare che la funzione in questione ha una discontinuità di 2ª specie nel punto x=0.

IV.9.3 Punti di Discontinuità di 3ª specie (o discontinuità eliminabile)

Si dice che nel punto x_0 la funzione *f(x)* ha una discontinuità di 3ª specie (o discontinuità eliminabile) se in tale punto:

1) ***Esiste ed è finito il limite della funzione f(x) per x tendente a x_0***, ***ma non è possibile calcolare il valore della funzione nello stesso punto*** (ossia $f(x_0)=?$);
2) ***Esiste ed è finito il limite della funzione f(x) per x tendente a x_0***, ***ma lo stesso limite non coincide con il valore della funzione calcolato nello stesso punto*** (ossia $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$).

L'aggettivo *"eliminabile"* è dovuto al fatto che si può stabilire per la *f(x)* la continuità nel punto x_0 effettuando una delle seguenti operazioni:

a) Se in x_0 la funzione non è definita (ossia $f(x_0)=?$), basta completare la definizione in x_0 ponendo: $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$;
b) Se il limite della funzione per x tendente a x_0 non coincide con il valore della funzione calcolato nel punto x_0, basta porre anche qui: $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

In entrambi i casi, naturalmente, la funzione che si ottiene non è più quella originaria, ma ne differisce solo per $x=x_0$.

Questa nuova funzione si chiama ***prolungamento per continuità*** di *f(x)* nel punto x_0.

Per meglio comprendere il concetto esposto, può essere utile il seguente *esempio*:

Consideriamo la funzione $y = \frac{senx}{x}$*, definita per tutti i valori della $x \neq 0$. Proprio nel punto x=0, la funzione ha una discontinuità di 3ª specie, perché in tale punto esiste ed è finito il limite (1), ma come detto non esiste il valore della funzione. Per quanto detto al precedente punto a), tale funzione è prolungabile per continuità nel punto x=0, e il suo prolungamento è la funzione:*

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x}, & \text{per ogni } x \neq 0; \\ 1, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

IV.10 La Continuità della Funzione Composta e della Funzione Inversa

Data una funzione $g:A \to B$ e una funzione $f:B \to C$, ove ***A***, ***B***, ***C***, sono tre insiemi, esiste, come è noto, una funzione

$$h:A \to C$$

che associa a ogni elemento ***x*** di ***A*** uno e un solo elemento di ***C*** in tal modo:

$$\forall x \in A \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

h prende il nome di *funzione composta,* ***f*** e ***g*** sono le *funzioni componenti*

Più propriamente, se ***z=g(x)*** è una funzione reale definita in **[a, b]** e ***y=f(z)*** è una funzione della variabile ***z,*** che supponiamo definita per ogni valore della ***z*** che si ricava dalla prima funzione al variare della ***x*** nell'intervallo **[a, b]**, è possibile costruire la funzione ***y=f[g(x)]*** che viene chiamata *funzione composta* o anche *funzione di funzione*, poiché appunto la ***y*** è funzione della ***z*** che a sua volta è funzione della ***x***.

Per tali funzioni si dimostra, ma noi ci limitiamo solo ad enunciarlo il seguente teorema:

Se g(x) è continua in un punto $x_0 \in [a, b]$ *e f(z) è continua nel punto* $z_0=g(x_0)$*, allora la funzione composta f[g(x)] è continua nel punto* x_0*.*

In poche parole, una funzione composta è continua in un punto, se nello stesso punto sono continue le sue funzioni componenti.

Grazie a questo teorema è possibile dimostrare la continuità di funzioni assai complicate. Così, ad esempio:

La funzione $y = \log\sqrt[3]{x^2}$ *è continua perché lo sono le due funzioni componenti, ossia:*

$$y = \log z \qquad e \qquad z = \sqrt[3]{x^2}.$$

Così pure è continua la funzione $y = a^{senx}$*, perchè lo sono le due funzioni componenti:*

$$y = a^x \qquad e \qquad z = senx$$

Per ciò che riguarda le *funzioni inverse*, vale il seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare:

Una funzione y=f(x) continua in un intervallo [a, b] nel quale è crescente (o decrescente), definisce una funzione inversa x=g(y) che è continua e crescente (o decrescente) nell'intervallo [m, M], dove m e M sono, rispettivamente, il minimo e il massimo della f(x) in [a, b].

IV.11 Forme indeterminate dei Limiti

Come abbiamo visto, nel caso di una funzione continua, il calcolo del valore del limite (se esiste), si riduce a una sostituzione del valore a cui tende la x nella funzione di partenza.

Tuttavia, esistono funzioni in cui tale sostituzione non conduce da sé alla determinazione del valore finito o infinito del limite ma porta a una *forma di indecisione* o *indeterminazione*. Vediamo quali sono le *forme indeterminate* più comuni e come ci si comporta davanti a tali situazioni.

1) FORMA $\frac{0}{0}$

Supponiamo di voler calcolare il valore del limite della seguente funzione:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}.$$

Se sostituissi al posto della x il valore a cui essa tende, ossia 1, otterrei:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}=\frac{(1)^2+5(1)-6}{(1)^2+(1)-2}=\frac{0}{0}$$

L'espressione $\frac{0}{0}$ *non ha alcun significato, ossia è una di quelle famose forme indeterminate. Che fare ?*

Si osserva, intanto, che sia il numeratore che il denominatore si possono scomporre, per cui la funzione diventa:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+2)} \qquad \textit{da cui semplificando} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{(x+6)}{(x+2)}.$$

Se provo a rifare la sostituzione, stavolta, ottengo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+6)}{(x+2)}=\frac{(1+6)}{(1+2)}=\frac{7}{3}.$$

Il valore $\frac{7}{3}$ *finito e determinato rappresenta il valore del limite cercato.*

2) FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

Supponiamo di voler calcolare il valore del limite della seguente funzione:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}.$$

Se sostituissi al posto della x il valore a cui essa tende, ossia $\propto$, otterrei:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}=\frac{(\infty)^2+5(\infty)-6}{(\infty)^2+(\infty)-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

L'espressione $\frac{\infty}{\infty}$ non ha alcun significato, ossia è una di quelle famose forme indeterminate. Che fare ?

Proviamo a dividere il numeratore e il denominatore della funzione per x^2. Si ottiene (rieffettuando successivamente la sostituzione):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{5}{\infty}-\frac{6}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}=\frac{1+0-0}{1+0-0}=1$$

Ricordando che una qualsiasi quantità divisa per ∞ dà come risultato 0 si ottiene che il valore del limite cercato è 1.

IV.12 Esercizi proposti

Calcolare il valore dei seguenti limiti:

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8}$ $[0]$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4}$ $[\infty]$ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$ $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-x-2}$ $[0]$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}$ $[0]$ $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ $[6]$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}$ $[0]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}$ $[2]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$ $[1]$

$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+9}$ $[0]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{8x^3-4x^2+9}{4x^3+x-2}$ $[2]$

$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+x+5}{x^7-2x^3+4}$ $[0]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{5x-1}{x^3+2}$ $[0]$ $\lim_{x\to \infty}\frac{x^5+4x^3+9}{x^3-2x+5}$ $[\infty]$