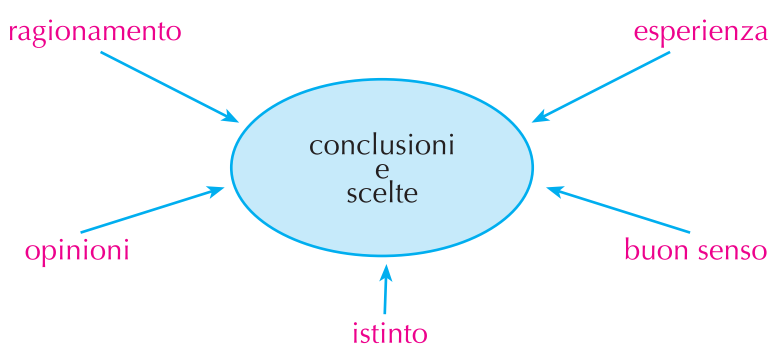
La logica

Obiettivi

- riconoscere proposizioni e individuarne il valore di verità
- operare con le proposizioni e riconoscere equivalenze logiche
- stabilire la correttezza di un ragionamento logico
- operare con i predicati
- usare in modo appropriato i quantificatori

Matematica e realtà

In tutti i campi delle attività umane siamo costantemente portati a trarre conclusioni e a fare scelte; il modo con cui arriviamo a queste conclusioni è però diverso a seconda delle situazioni. Spesso usiamo il buon senso, la nostra esperienza o ci facciamo guidare dall'istinto, a volte ci facciamo condizionare dalle opinioni di altre persone, altre volte ancora cerchiamo di sviluppare un ragionamento.



In matematica si usa un ragionamento nel quale la correttezza delle conclusioni è affidata esclusivamente al rigore delle argomentazioni; per esempio, consideriamo questi due brevi discorsi:

- Tutti i mammiferi allattano i piccoli.
  I gatti sono mammiferi,
  quindi i gatti allattano i piccoli.
- I ragazzi che hanno lo scooter sono felici.
  Io non ho lo scooter,
  quindi non sono felice.

Anche se i due ragionamenti sono del tutto simili nella forma, siamo portati ad affermare che il primo "funziona", mentre il secondo no: non riusciresti mai a convincere tuo padre a comprarti lo scooter dicendogli queste cose!
Si sente quindi la necessità di stabilire delle regole in base alle quali poter decidere se un ragionamento è corretto oppure no, indipendentemente dal fatto che le parti che lo compongono siano vere o meno.
Se ci riferiamo al secondo esempio, tutte e tre le frasi possono ritenersi vere, ma ugualmente non possiamo accettare che l'infelicità sia da attribuirsi obbligatoriamente al fatto di non avere lo scooter.
La scienza che si occupa di controllare la correttezza di un ragionamento è la *Logica*; in questo capitolo cominciamo a introdurre i primi concetti relativi a questo argomento.
Quando avrai completato il tuo studio potrai dare una giustificazione formale e non soltanto intuitiva della valutazione dei due ragionamenti che abbiamo visto.
In ogni caso, trovi il ragionamento corretto al termine del capitolo.

1. LE PROPOSIZIONI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

Un qualunque ragionamento è, in ultima analisi, composto da frasi di senso compiuto che, in logica, prendono il nome di *proposizioni*.

Chiamiamo **proposizione** una frase di senso compiuto della quale si può dire se è vera o se è falsa.
Quando una proposizione è vera diremo che il suo valore di verità è Vero (V), quando è falsa diremo che il suo valore di verità è Falso (F).

*Le proposizioni si chiamano anche **enunciati** e si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto*

In base a questa definizione, sono proposizioni le seguenti frasi:

a: «Pasqua cade sempre di domenica.» valore di verità: V

b: «Le balene sono mammiferi.» valore di verità: V

c: «$\frac{5}{4}$ è un numero intero.» valore di verità: F

d: «Torino si trova in Veneto.» valore di verità: F

Non sono invece proposizioni in quanto non ha senso chiedersi se sono vere o false:

«Portami un pacchetto di caramelle.»

«Viva il Milan!»

«Quanti anni hai?»

Sono da annoverare fra le proposizioni anche frasi del tipo:

«Esistono dei numeri che sono interi.»

«In classe c'è qualcuno che non ha il libro di matematica.»

Anche se non si sta parlando di un numero o di uno studente particolare, tuttavia possiamo dire che la prima frase è vera, che la seconda è falsa solo se gli studenti hanno tutti il libro di matematica ed è vera negli altri casi; entrambe sono perciò delle proposizioni.

I valori di verità V e F sono a volte sostituiti dai simboli 1 e 0:

$$V \to 1 \qquad F \to 0$$

Le proposizioni sono dunque quelle frasi che asseriscono un fatto, vero o falso che sia.

Poiché lo scopo che ci prefiggiamo è quello di costruire dei metodi che ci permettano di stabilire la correttezza o meno di un ragionamento, dobbiamo richiedere che le proposizioni soddisfino alcune caratteristiche:

I PRINCIPI FONDAMENTALI

Principio di non contraddizione: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.

Principio del terzo escluso: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

In altre parole:

vorrei e non vorrei

frase che molto spesso si sente dire, non può essere accettata come proposizione perché contraddice il primo principio; in matematica non si può volere e non volere una stessa cosa: o si vuole che un triangolo sia isoscele o non lo si vuole. Se stai affannosamente cercando il libretto delle giustificazioni e non lo trovi, non puoi dire al tuo insegnante:

«c'è, ma non riesco a trovarlo»

perché questa affermazione contraddice il principio del terzo escluso, infatti o il libretto c'è (e allora lo devi trovare) oppure non c'è (ed è per questo che non lo trovi).

"Essere o non essere" la celebre frase pronunciata da Amleto all'inizio del suo monologo è invece una proposizione. Vai a pagina 35 per scoprire perché.

Già da queste prime nozioni ci accorgiamo che il tipo di logica che ci accingiamo a studiare può controllare la correttezza solo di quei ragionamenti che coinvolgono proposizioni, le quali, a loro volta, devono obbedire alle regole fissate dai due principi di non contraddizione e del terzo escluso.
Ma un ragionamento, di solito, è una cosa complessa, composta da molte proposizioni legate fra loro. Per esempio:

«Giovanni studia al Conservatorio perché ama la musica e vuole diventare un direttore d'orchestra»

è indubbiamente una proposizione (conoscendo Giovanni possiamo sicuramente dire se questa frase è vera o no), ma possiamo ritenere che essa sia formata da più proposizioni di carattere più semplice:

- *a*: «Giovanni studia al Conservatorio»
- *b*: «Giovanni ama la musica»
- *c*: «Giovanni vuole diventare direttore d'orchestra»

e che, in ultima analisi, il valore di verità della proposizione iniziale dipenda dai valori di verità di ciascuna delle proposizioni più semplici.
Dobbiamo quindi fissare delle regole che permettano di stabilire il valore di verità di una proposizione complessa ottenuta dalla combinazione di proposizioni semplici. Chiariamo innanzi tutto cosa intendiamo per "proposizione semplice".
La caratteristica delle proposizioni *a*, *b*, *c* precedenti è che sono formate da una sola forma verbale, il predicato, alla quale sono eventualmente collegati alcuni argomenti:

Che cosa possiamo dire dell'intera proposizione sapendo che Giovanni studia al Conservatorio e ama la musica (a e b vere), ma non vuole diventare direttore d'orchestra (c falsa)?

PROPOSIZIONE	PREDICATO	ARGOMENTI
a	studiare	Giovanni, Conservatorio
b	amare	Giovanni, musica
c	diventare	Giovanni, direttore d'orchestra

PREPOSIZIONI ATOMICHE E MOLECOLARI

Una proposizione si dice **atomica** se è formata da un solo predicato.

Le proposizioni atomiche possono avere uno, due o più argomenti, ma possono anche non averne. Per esempio:

- «La campana suona» - predicato: suonare
  - argomento: la campana
- «Piove» - predicato: piovere
  - non ci sono argomenti

Le proposizioni che sono formate da più proposizioni atomiche si dicono **molecolari**.

Le proposizioni molecolari sono il risultato di alcune operazioni fra proposizioni atomiche nelle quali i simboli di operazione sono alcune particelle della lingua parlata come "e", "o", "non" e così via.
Nei prossimi paragrafi ci occuperemo di studiare come valutare il valore di verità delle proposizioni molecolari in base alle operazioni che legano fra loro le proposizioni atomiche.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Individua le proposizioni:

a. I poligoni hanno almeno tre lati. **b.** Domani probabilmente sarò interrogato in Matematica.

c. 12 è un numero intero. **d.** $\frac{3}{4} > 1$. **e.** Vuoi una caramella?

2. Completa distinguendo le forme verbali e gli argomenti.

a. Francesco Totti è un calciatore. predicato: ....
argomenti: ....

b. 28 è minore di 32. predicato: ....
argomenti: ....

c. Angela dorme. predicato: ....
argomenti: ....

d. Nevica. predicato: ....
argomenti: ....

2. LE OPERAZIONI CON LE PROPOSIZIONI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 26

Gli operatori che si usano per comporre fra loro le proposizioni si chiamano **connettivi** ed operano, a seconda del tipo, su una sola o su due proposizioni alla volta; il risultato dell'operazione ha un valore di verità che dipende sia dal connettivo usato, sia dal valore di verità delle proposizioni atomiche coinvolte.
Per rappresentare i possibili risultati, si usano delle tabelle che prendono il nome di **tavole di verità**; in esse, le prime colonne riportano le possibili combinazioni dei valori di verità delle proposizioni coinvolte mentre la colonna finale indica il valore di verità della proposizione molecolare. Così:

- se abbiamo una sola proposizione *a*, la tavola ha due sole righe perché *a* può essere vera oppure falsa;
- se abbiamo due proposizioni *a* e *b*, ci sono 4 possibili combinazioni.

Vediamo allora quali sono le operazioni che si possono eseguire con le proposizioni.

a
V
F

a	***b***
V	V
V	F
F	V
F	F

La negazione

È l'operazione logica che, data una proposizione *a*, restituisce la proposizione «**non** *a*».
La proposizione «**non** *a*» è F quando *a* è V ed è V quando *a* è F.
Il simbolo logico della negazione è un trattino posto sopra la lettera che individua la proposizione:

$$\overline{a}$$

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Per indicare la negazione si può anche usare il simbolo ¬ anteposto alla proposizione: $\neg a$

Occorre fare attenzione alle modalità con cui si esprime una negazione; è corretto anteporre il connettivo *non* alla forma verbale, oppure la frase *non è vero che* all'intera proposizione; per esempio:

- la negazione di *a*: «il rombo ha i lati congruenti» si può esprimere indifferentemente nei seguenti due modi:
  - $\overline{a}$: «il rombo **non** ha i lati congruenti»
  - $\overline{a}$: «**non è vero che** il rombo ha i lati congruenti».

  Poiché *a* è V, il valore di verità di $\overline{a}$ è F.

La doppia negazione di una proposizione coincide con la preposizione stessa:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

In altre parole, una doppia negazione afferma.

Non è invece opportuno cambiare l'enunciazione della proposizione se si vogliono evitare errori. Per esempio la negazione di:

«Ogni Italiano si sa esprimere nel dialetto locale»

non è

«Nessun Italiano si sa esprimere nel dialetto locale»

ma è

«Non è vero che ogni Italiano si sa esprimere nel dialetto locale».

Attenzione agli errori

La congiunzione

È l'operazione logica che, date due proposizioni *a* e *b*, restituisce la proposizione «*a* **e** *b*».
Tale proposizione si ritiene vera solo se entrambe le proposizioni *a* e *b* sono vere, falsa in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico della congiunzione è ∧ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \wedge b$$

a	***b***	$a \wedge b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione si può anche esprimere usando i termini:
et *dalla lingua latina;*
and *in linguaggio informatico.*

Per esempio:

- se *a*: «Dante ha scritto la *Divina Commedia*» (V) e *b*: «Alessandro Manzoni ha scritto *I promessi sposi*» (V), la proposizione $c = a \wedge b$: «Dante ha scritto la *Divina Commedia* e Alessandro Manzoni ha scritto *I promessi sposi*» è V
- se *a*: «12 è un numero pari» (V) e *b*: «8 è un numero dispari» (F), la proposizione $c = a \wedge b$: «12 è un numero pari e 8 è un numero dispari» è F.

La disgiunzione inclusiva

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «a **o** b».
Tale proposizione si ritiene falsa solo se entrambe le proposizioni a e b sono false, vera in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico della disgiunzione inclusiva è $\lor$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \lor b$$

a	b	$a \lor b$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione inclusiva si può anche esprimere usando i termini:
vel *dalla lingua latina;*
or *in linguaggio informatico.*

Per esempio:

- se a: «8 è pari» (V) e b: «12 è multiplo di 5» (F), la proposizione $c = a \lor b$: «8 è pari o 12 è multiplo di 5» è V;
- se a: «la lettera *i* è una vocale» (V) e b: «la lettera *c* è una consonante» (V), la proposizione $c = a \lor b$: «la lettera *i* è una vocale o la lettera *c* è una consonante» è V.

La frase di Amleto citata a pagina 32 è una proposizione:

«essere» $\lor$ «non essere»

Inoltre, poiché se una delle due è Vera, l'altra è Falsa, si tratta di una proposizione sempre Vera.

La disgiunzione esclusiva

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «**o** a **o** b».
Tale proposizione si ritiene vera solo se le proposizioni a e b sono una falsa e l'altra vera, si considera falsa se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.
Il simbolo logico della disgiunzione inclusiva è $\dot{\lor}$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \dot{\lor} b$$

a	b	$a \dot{\lor} b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disgiunzione esclusiva si può anche esprimere usando i termini:
aut *dalla lingua latina;*
xor *in linguaggio informatico.*

Questa forma di disgiunzione è di frequente uso comune; si dice per esempio:

«o vieni o parto senza di te» «o sei promosso o sei bocciato»

Un altro esempio:

- se a: «3 è dispari» (V) e b: «3 è pari» (F), la proposizione $c = a \dot{\lor} b$: «o 3 è dispari o 3 è pari» è V (la disgiunzione può anche essere enunciata così: «3 o è dispari o è pari»).

L'implicazione materiale

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «**se** a **allora** b».
Tale proposizione si ritiene falsa solo se la prima proposizione è vera e la seconda è falsa, vera in tutti gli altri casi.
Il simbolo logico dell'implicazione materiale è $\rightarrow$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \rightarrow b$$

a	b	$a \rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nell'implicazione $a \rightarrow b$, la proposizione ***a*** si dice **premessa**, la proposizione ***b*** si dice **conseguenza**.
Per esempio:

- se a: «Le aquile sono uccelli» (V) e b: «I leoni sono mammiferi» (V), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se le aquile sono uccelli allora i leoni sono mammiferi» è V
- se a: «Io sono un uccello» (F) e b: «Io volo» (F), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se sono un uccello allora volo» è V.
  Osserva che anche nel linguaggio corrente siamo portati a dire che questa proposizione è vera pur essendo false le sue componenti
- se a: «Maria è miope» (V) e b: «Maria vede bene da lontano» (F), la proposizione $c = a \rightarrow b$: «Se Maria è miope allora vede bene da lontano» è F.

La coimplicazione materiale

È l'operazione logica che, date due proposizioni a e b, restituisce la proposizione «*a* **se e solo se** *b*».
Tale proposizione si ritiene vera se le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità (quindi se sono entrambe vere oppure entrambe false), falsa negli altri casi.
Il simbolo logico della coimplicazione materiale è $\leftrightarrow$ e va posto fra le due proposizioni:

$$a \leftrightarrow b$$

a	***b***	$a \leftrightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La coimplicazione è sostanzialmente una implicazione doppia; essa risulta quindi vera quando le due proposizioni $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow a$ sono entrambe vere.
Per esempio:

- se a: «15 è un numero primo» (F) e b: «15 è un numero dispari» (V), la proposizione $c = a \leftrightarrow b$: «15 è un numero primo se e solo se è dispari» è F
- se a: «parto» e b: «prendo l'autobus», la proposizione $c = a \leftrightarrow b$: «parto se e solo se prendo l'autobus» è V se parto usando come mezzo di trasporto l'autobus oppure se non parto e non prendo nemmeno l'autobus; è falsa negli altri casi, per esempio se parto ma uso l'auto.

Osservazione

Le operazioni logiche fondamentali sono solo le prime tre che abbiamo descritto: la negazione, la congiunzione e la disgiunzione inclusiva.
Le altre si possono tutte descrivere in funzione di queste.
Per esempio, vedremo nel prossimo paragrafo che l'operazione logica $a \rightarrow b$ equivale alla proposizione $\overline{a} \vee b$, quindi un'implicazione si può esprimere mediante la negazione e la disgiunzione inclusiva.
È tuttavia consuetudine introdurre anche le operazioni di disgiunzione esclusiva e di implicazione sia perché semplificano la valutazione del valore di verità di una proposizione complessa, sia perché si usano frequentemente in qualunque linguaggio; in particolare l'implicazione e la doppia implicazione verranno usate nelle dimostrazioni dei teoremi.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa la tabella:

OPERAZIONE	SIMBOLO LOGICO	RISULTATO
negazione	....	vera se ....
congiunzione	....	vera se ....
disgiunzione inclusiva	....	falsa se ....
disgiunzione esclusiva	....	vera se ....
implicazione	....	falsa se ....
coimplicazione	....	falsa se ....

2. Delle due proposizioni a e b si sa che a è V e b è F; indica il risultato delle seguenti operazioni logiche:

a. $a \vee b$ V F

b. $a \wedge b$ V F

c. $b \rightarrow a$ V F

d. $\overline{a} \rightarrow b$ V F

e. $a \leftrightarrow \overline{b}$ V F

3. ESPRESSIONI LOGICHE ED EQUIVALENZE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 31

3.1 Le espressioni logiche

Un qualunque ragionamento, anche il più semplice, è composto, in generale, da più di due proposizioni; si possono allora costruire delle vere e proprie espressioni logiche delle quali si può calcolare il valore di verità. Per esempio:

«Se durante l'anno studio e mi comporto bene, mio padre mi lascerà andare in vacanza con i miei amici, ma se non studio e non vengo promosso, credo proprio che in vacanza con i miei amici non ci andrò».

In questo ragionamento possiamo individuare alcune proposizioni atomiche:

a: «Durante l'anno studio»

b: «Durante l'anno mi comporto bene»

c: «Vado in vacanza con i miei amici»

d: «Vengo promosso»

Sinteticamente, usando i connettivi che rappresentano le operazioni che abbiamo studiato, possiamo riscrivere il ragionamento in questo modo:

$$[(a \wedge b) \rightarrow c] \wedge [(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$$

La valutazione del valore di verità di questo ragionamento dipende dai valori di verità delle proposizioni atomiche che lo compongono; supponiamo che sia:

a V $\quad$ b F $\quad$ c F $\quad$ d V

allora

$a \wedge b$ è F

$[(a \wedge b) \rightarrow c]$ è V

Se conosciamo il valore di verità di ogni proposizione di un'espressione logica, per stabilire se essa è vera oppure falsa basta applicare le regole delle operazioni logiche.

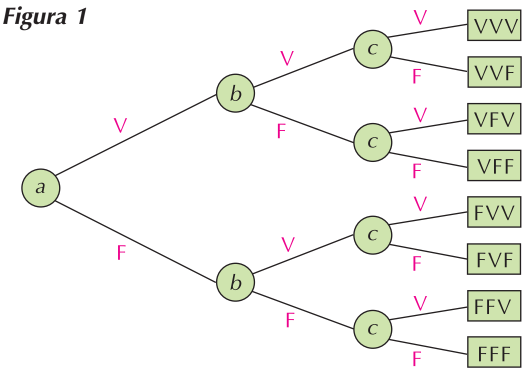
$\overline{a} \wedge \overline{d}$ è F

$[(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$ è V

$[(a \wedge b) \rightarrow c] \wedge [(\overline{a} \wedge \overline{d}) \rightarrow \overline{c}]$ è V

In genere, però, si vuole sapere come varia il valore di verità di un'espressione al variare dei valori di verità delle singole proposizioni che la formano. Occorre allora costruire una tavola di verità che contempli tutte le possibilità.
Se con due proposizioni abbiamo 4 possibilità, quante ce ne saranno con tre, quattro, dieci proposizioni? Inoltre, come possiamo essere sicuri di scriverle tutte?
La risposta ad entrambe le domande si può ottenere costruendo un diagramma ad albero che incrementa il numero di proposizioni ad ogni ramificazione. In sostanza, a partire dalla proposizione *a*, dalla quale si dipartono i due rami che rappresentano le due possibilità V o F, si giunge alla proposizione *b* che può essere anch'essa V o F; da *b* si passa a *c* e così via fino ad esaurire le proposizioni. In ***figura 1*** puoi vedere l'albero che si ottiene con tre proposizioni; basta adesso leggere i valori di verità lungo ciascun percorso per avere tutti i casi possibili.

Figura 1



Osserviamo poi che, poiché ad ogni nuova ramificazione il numero dei casi raddoppia, il numero complessivo di possibilità è una potenza del 2:

- con una proposizione: $2^1 = 2$ casi;
- con due proposizioni: $2^2 = 4$ casi;
- con tre proposizioni: $2^3 = 8$ casi;

e così via.

Con n proposizioni i casi possibili sono 2^n

Per essere sicuri di scrivere tutte le possibilità, completiamo le colonne della tavola di verità in questo modo (osserva la tabella a lato nella quale è rappresentato il caso di tre proposizioni):

- colonna della prima proposizione: metà casi di V e metà casi di F
- colonna delle seconda proposizione: $\frac{1}{4}$ casi di V e $\frac{1}{4}$ casi di F alternati
- colonna delle terza proposizione: $\frac{1}{8}$ casi di V e $\frac{1}{8}$ casi di F alternati

e così via fino a che nell'ultima colonna vi è una alternanza di V e F.
In sostanza dimezziamo ogni volta il numero di casi di V e F rispetto al precedente.

a	***b***	***c***
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Vediamo allora attraverso alcuni esempi come si valuta il valore di verità di un'espressione logica.

ESEMPI

1. Studiamo l'espressione logica $((a \vee b) \wedge \overline{a}) \rightarrow b$.
Abbiamo a che fare con due proposizioni quindi abbiamo 4 casi possibili. Per la valutazione della proposizione procediamo come nelle espressioni numeriche determinando il risultato delle operazioni par-

ziali; nelle colonne successive a quelle dove sono rappresentate le proposizioni atomiche valutiamo in successione le seguenti operazioni

$a \vee b$ $\quad \bar{a}$ $\quad (a \vee b) \wedge \bar{a}$ $\quad$ e infine $\quad ((a \vee b) \wedge \bar{a}) \rightarrow b$

Ecco la tavola:

a	b	$a \vee b$	$\bar{a}$	$(a \vee b) \wedge \bar{a}$	$((a \vee b) \wedge \bar{a}) \rightarrow b$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

2. Valutiamo l'espressione $\overline{(a \vee b)} \wedge a$.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{(a \vee b)} \wedge a$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

3. Studiamo il valore di verità dell'espressione $((a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)) \rightarrow c$.

Con tre proposizioni abbiamo 8 possibilità; ecco la tavola che risulta:

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \vee \bar{b}$	$\bar{a} \vee b$	$(a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$	$((a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)) \rightarrow c$
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F

I precedenti esempi 1. e 2. riguardano espressioni logiche molto particolari perché nel primo caso abbiamo ottenuto che l'espressione è sempre vera e nel secondo che è sempre falsa. In logica espressioni di questo tipo prendono nomi particolari.

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Si dice **tautologia** un'espressione logica che è vera qualunque sia il valore di verità degli enunciati che la compongono.

Si dice **contraddizione** un'espressione logica che è falsa qualunque sia il valore di verità degli enunciati che la compongono.

Le tautologie e le contraddizioni sono importanti perché definiscono proposi-

zioni complesse che sono assolutamente vere o assolutamente false, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni atomiche che le compongono. Non è quindi importante da quali proposizioni sono formate; esse stabiliscono delle verità o delle falsità assolute.
L'espressione logica $((a \vee b) \wedge \overline{a}) \to b$ dell'esempio 1 è quindi una tautologia, l'espressione $\overline{(a \vee b)} \wedge a$ dell'esempio 2. è una contraddizione.

Altri esempi di tautologie sono i principi fondamentali che abbiamo introdotto nel primo paragrafo e che, facendo uso dei connettivi, possiamo scrivere così:

- **principio di non contraddizione:** una proposizione *a* non può essere contemporaneamente vera e falsa: $\overline{a \wedge \overline{a}}$
- **principio del terzo escluso:** una proposizione è vera oppure falsa: $a \vee \overline{a}$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa la tavola di verità dell'espressione logica $(a \wedge b) \to (a \vee b)$ e verifica che si tratta di una tautologia.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$(a \wedge b) \to (a \vee b)$
V	V	...	...	...
V	F	...	...	...
F	V	...	...	...
F	F	...	...	...

3.2 *Le equivalenze logiche*

A volte capita che due espressioni logiche formalmente diverse, ma formate dalle stesse proposizioni, abbiano la stessa tavola di verità, come per esempio:

$$a \to b \qquad \text{e} \qquad \overline{a} \vee b$$

le cui tavole di verità sono

a	b	$a \to b$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

a	b	$\overline{a}$	$\overline{a} \vee b$
V	V	F	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	F	V	**V**

Questo significa che, dal punto di vista logico, esse esprimono lo stesso concetto, sono cioè **equivalenti**; scriviamo allora che

- $a \to b = \overline{a} \vee b$

  dove il simbolo di uguaglianza significa *equivalenza logica*.

Se analizziamo anche le altre equivalenze logiche riportate a lato della pagina, ci accorgiamo che implicazione, coimplicazione e disgiunzione esclusiva si possono realizzare anche mediante i connettivi *e*, *o*, *non*; queste operazioni allora, come già anticipato nell'osservazione del precedente paragrafo, non sono fondamentali e sintetizzano semplicemente una opportuna combinazio-

Altre equivalenze logiche sono:

- $a \leftrightarrow b = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$
- $a \dot{\vee} b = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$

ne delle operazioni di negazione, congiunzione e disgiunzione inclusiva.
Consideriamo adesso le due proposizioni

$$a \to b \qquad \text{e} \qquad \overline{b} \to \overline{a}$$

PROPOSIZIONE CONTRONOMINALE

delle quali la seconda proposizione prende il nome di **contronominale** della prima. Le rispettive tavole di verità sono le seguenti:

a	b	$a \to b$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{b} \to \overline{a}$
V	V	F	F	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	V	**V**

Avendo ottenuto gli stessi valori di verità possiamo concludere che:

la proposizione $a \to b$ e la sua contronominale $\overline{b} \to \overline{a}$ sono logicamente equivalenti.

Per esempio dire:

- $\underbrace{\text{se Giovanni è cattolico}}_{a}$ allora $\underbrace{\text{è cristiano}}_{b}$ ($\to$)

  equivale a dire:

  $\underbrace{\text{se Giovanni non è cristiano}}_{\overline{b}}$ allora $\underbrace{\text{non è cattolico}}_{\overline{a}}$ ($\to$)

- $\underbrace{\text{se un numero è dispari}}_{a}$ allora $\underbrace{\text{non è divisibile per 6}}_{\overline{b}}$ ($\to$)

  equivale a dire:

  $\underbrace{\text{se un numero è divisibile per 6}}_{\overline{\overline{b}} = b}$ allora $\underbrace{\text{non è dispari}}_{\overline{a}}$ ($\to$)

PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI LOGICHE

Enunciamo adesso alcune equivalenze che rappresentano le proprietà delle operazioni logiche; la loro dimostrazione mediante la costruzione delle rispettive tavole di verità può essere un utile esercizio di applicazione.

- $\overline{\overline{a}} = a$ — legge della doppia negazione
- $a \wedge a = a$ e $a \vee a = a$ — proprietà di idempotenza della congiunzione e della disgiunzione
- $a \wedge (a \vee b) = a$ e $a \vee (a \wedge b) = a$ — proprietà di assorbimento
- $a \wedge b = b \wedge a$ e $a \vee b = b \vee a$ — proprietà commutativa della congiunzione e della disgiunzione
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ e $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ — proprietà associativa della congiunzione e della disgiunzione
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ — proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione
- $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ — prima legge di De Morgan
- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ — seconda legge di De Morgan

ESEMPI

1. Stabiliamo, applicando le proprietà delle operazioni logiche, se le seguenti sono equivalenze logiche:

a. $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c})} = (a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee c)$

Applichiamo le leggi di De Morgan alla prima parte: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c})} = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} \wedge \overline{(a \wedge \overline{c})}$

essendo: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} = \overline{\overline{a}} \wedge \overline{\overline{b}} = a \wedge b$ e $\overline{(a \wedge \overline{c})} = \overline{a} \vee \overline{\overline{c}} = \overline{a} \vee c$

si ha che: $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} \wedge \overline{(a \wedge \overline{c})} = (a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee c)$

Avendo ottenuto la seconda parte, si tratta di una equivalenza logica.

b. $a \leftrightarrow b = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$

Ricordiamo che $a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$ e che $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Possiamo allora riscrivere il primo membro dell'uguaglianza in questo modo:

$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = (\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee a) = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$

Quella data è quindi un'equivalenza logica.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Due proposizioni formate dalle stesse proposizioni sono logicamente equivalenti se:

a. usano gli stessi connettivi
b. sono entrambe sempre vere
c. assumono lo stesso valore di verità in corrispondenza di uguali valori di verità delle proposizioni
d. le loro tavole di verità hanno lo stesso numero di casi V e F.

2. Per ogni coppia di proposizioni, enuncia per esteso le espressioni $\overline{a \vee b}$ e $\overline{a \wedge b}$ utilizzando anche le leggi di De Morgan.

a. *a*: «Lucia ha i capelli neri» *b*: «Lucia ha gli occhi chiari»
b. *a*: «Luca è un autista prudente» *b*: «La patente di Luca ha ancora 20 punti»
c. *a*: «Carolina Kostner ha partecipato ai mondiali di pattinaggio del 2007»
b: «Nei mondiali di pattinaggio del 2007 Carolina Kostner si è classificata sesta»

4. La logica dei predicati

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 34

Abbiamo visto che le proposizioni, in generale, sono costituite da forme verbali legate a degli argomenti. Quando un argomento non è noto, non è più possibile parlare di proposizioni perché di queste frasi non si può dire se sono vere o false, come per esempio nel caso della frase

x è amico di Giulia

"Essere amici di Giulia" esprime in questo caso la proprietà che identifica alcuni elementi di un insieme A di persone; A rimane in questo modo diviso in due parti: quella i cui elementi sono amici di Giulia, quella i cui elementi non sono amici di Giulia (***figura 2***). Se al posto di x si sostituisce un elemento che appartiene alla prima parte, per esempio Matteo, si ottiene una proposizione vera:

«Matteo è amico di Giulia»

Figura 2

Se al posto di x si sostituisce un elemento che appartiene alla seconda parte, per esempio Luca, si ottiene una proposizione falsa:

«Luca è amico di Giulia»

PREDICATI E ENUNCIATI APERTI

> La proprietà che esprime una caratteristica relativa ad alcuni elementi di un insieme si dice **predicato**.

Un predicato lega fra loro degli argomenti, alcuni dei quali possono non essere noti; gli argomenti non noti vengono normalmente indicati con una lettera minuscola dell'alfabeto, di solito x, y o z, e di essi si dice che sono delle **variabili**.
Per esempio, nelle frasi:

x è cugino di Luca	"essere cugini di Luca" è il predicato	x è la variabile
x ama y	"amare" è il predicato	x e y sono le variabili

> Le frasi che sono formate da un predicato e da alcuni argomenti incogniti si dicono **enunciati aperti**.

*Gli enunciati aperti si chiamano anche **proposizioni aperte**.*

Un enunciato aperto si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto seguita dai nomi delle variabili racchiuse in una coppia di parentesi tonde; per esempio:

- $p(x)$: «x è maggiore di 8» è un enunciato aperto con una sola variabile, e si ha che:
  $p(10)$: «10 è maggiore di 8» (V)
  $p(2)$: «2 è maggiore di 8» (F)
  $p(-1)$: «-1 è maggiore di 8» (F)

- $q(x, y)$: «x è la capitale di y» è un enunciato aperto con due variabili, e si ha che:
  q(Parigi, Francia) : «Parigi è la capitale della Francia» (V)
  q(Roma, Germania) : «Roma è la capitale della Germania» (F)

DOMINIO

> L'insieme dei valori che è possibile attribuire alle variabili, indipendentemente dal fatto che rendano la proposizione vera o falsa, si chiama **dominio** dell'enunciato aperto.

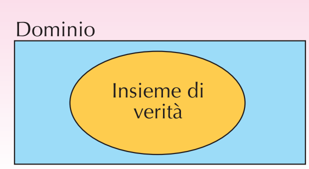
INSIEME DI VERITÀ

> L'insieme dei valori del dominio che rendono l'enunciato aperto una proposizione vera si dice **insieme di verità**.

Nel seguito indicheremo genericamente il dominio di un enunciato aperto con D e l'insieme di verità con la stessa lettera usata per indicare l'enunciato; per esempio, relativamente ai precedenti due esempi possiamo dire che:

- il dominio di $p(x)$ è un qualunque insieme numerico N, Z, Q o qualche loro sottoinsieme, l'insieme di verità è l'insieme P dei numeri di quell'insieme che sono maggiori di 8;
- il dominio di $q(x, y)$ è l'insieme Q delle coppie (x, y) appartenenti al prodotto cartesiano $A \times B$ dove A è l'insieme delle città, per esempio europee, B è l'insieme degli Stati europei.

Il dominio di un predicato rappresenta l'insieme ambiente, mentre l'insieme di verità è un sottoinsieme dell'insieme ambiente.

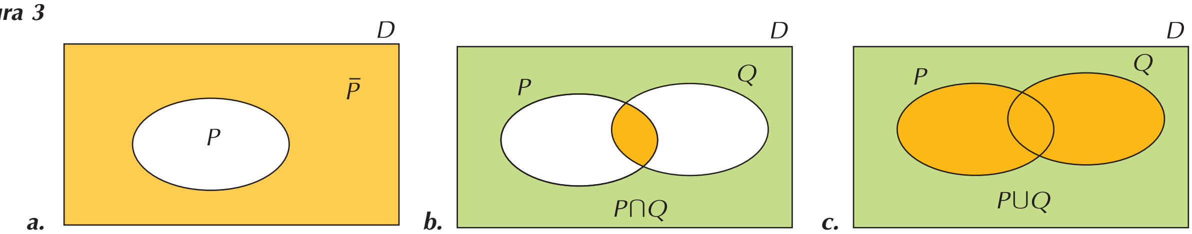


Con gli enunciati aperti è possibile eseguire le stesse operazioni logiche che si eseguono con le proposizioni e, proprio per la corrispondenza che esiste fra un enunciato aperto e il suo dominio, esiste una perfetta corrispondenza fra le operazioni con i predicati e le operazioni con gli insiemi.
In particolare, se D è l'insieme dominio di due enunciati nella stessa variabile $p(x)$ e $q(x)$, P e Q sono i loro insiemi di verità, si verifica che:

LE OPERAZIONI CON GLI ENUNCIATI APERTI

- la **negazione** di $p(x)$ è l'enunciato aperto $\overline{p(x)}$; il suo insieme di verità è l'insieme $\overline{P}$, complementare di P rispetto a D (***figura 3a***);
- la **congiunzione** è l'enunciato aperto $p(x) \wedge q(x)$; poiché si ottiene una proposizione vera solo per i valori di x che soddisfano contemporaneamente entrambi i predicati, il suo insieme di verità è $P \cap Q$, cioè l'intersezione degli insiemi di verità dei due enunciati (***figura 3b***);
- la **disgiunzione inclusiva** è l'enunciato aperto $p(x) \vee q(x)$; poiché si ottiene una proposizione vera per i valori di x che soddisfano l'uno o l'altro dei due predicati, il suo insieme di verità è $P \cup Q$, cioè l'unione degli insiemi di verità dei due enunciati (***figura 3c***).

Figura 3



ESEMPI

1. Sia $p(x)$: «x è un numero pari». Il suo insieme ambiente è l'insieme dei numeri naturali N, ma potrebbe anche essere l'insieme $A = \{x \in N \mid x < 20\}$ o un qualunque sottoinsieme di N.
Avremo in questo caso che, per esempio, $p(2)$ è vero, $p(6)$ è vero, $p(5)$ è falso, $p(17)$ è falso.

2. Sia $p(x, y)$: «$x + y = 10$». Se consideriamo x e y entrambi variabili in N, il dominio è l'insieme $N \times N$.
In questo caso avremo che $p(3, 5)$ è falso, $p(2, 8)$ è vero, $p(0, 10)$ è vero, $p(5, 8)$ è falso.

   Se pensiamo x e y variabili nell'insieme Q dei numeri razionali l'insieme ambiente sarà l'insieme $Q \times Q$.
In questo caso avremo che $p\left(\frac{13}{4}, \frac{27}{4}\right)$ è vero, $p\left(-\frac{3}{2}, \frac{23}{2}\right)$ è vero, $p\left(7, \frac{2}{9}\right)$ è falso.

3. In un insieme di persone del quale fa parte anche Luigi, sia $p(x)$: «x è amico di Luigi» e $q(x)$: «x ha la stessa età di Luigi»; allora:
   - $\overline{p(x)}$ ha come insieme di verità quello formato dalle persone che non sono amiche di Luigi
   - $p(x) \wedge q(x)$ ha come insieme di verità quello formato dai coetanei di Luigi che sono anche suoi amici
   - $p(x) \wedge \overline{q(x)}$ ha come insieme di verità quello formato dagli amici di Luigi che non hanno la sua età
   - $\overline{p(x)} \vee q(x)$ ha come insieme di verità quello formato dalle persone che sono coetanee di Luigi o non gli sono amiche.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Completa la tabella inserendo i dati mancanti:

ENUNCIATO APERTO	DOMINIO	INSIEME DI VERITA'
«x è una vocale»	....	{...}
«x è un multiplo di 3»	....	{...}
«$x + y = 5$»	$N \times N$	{...}

Per quanto riguarda il terzo enunciato devi trovare le coppie di numeri naturali la cui somma è 5, per esempio (0,5), (1,4) e così via.

2. Dati i predicati $p(x)$ e $q(x)$ entrambi definiti in un insieme D, l'insieme di verità di $\overline{p(x) \wedge q(x)}$ è:

a. $\mathscr{C}_D(P \cup Q)$ **b.** $\mathscr{C}_D(P \cap Q)$ **c.** $P \cup Q$ **d.** $P \cap Q$

5. I QUANTIFICATORI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 38

Considera le seguenti frasi:

a. «tutti gli uomini sono mortali»

b. «non tutti gli animali hanno le ali»

c. «qualche animale ha le ali»

d. «ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo»

e. «esiste almeno un numero positivo»

f. «non tutti i numeri naturali sono pari»

g. «qualche numero naturale è pari».

Di ciascuna di esse possiamo dire se è vera o se è falsa anche senza sapere di quale uomo si sta parlando, o di quale animale, o di quale numero particolare. Più precisamente, quando diciamo «tutti gli uomini sono mortali», esprimiamo il fatto che ogni elemento x appartenente all'insieme degli uomini ha la proprietà di essere mortale. Quando diciamo «qualche animale ha le ali», esprimiamo il fatto che esiste almeno un elemento x appartenente all'insieme degli animali che ha la proprietà di avere le ali.
Le due valutazioni sono nettamente diverse: la prima esprime il fatto che una proprietà è vera per tutti gli elementi x di un insieme U, nessuno escluso; la seconda ci dice che la proprietà è vera solo per qualche elemento dell'insieme U, quindi uno solo, due, tre, anche infiniti, ma non è necessario che essa sia vera per tutti gli elementi dell'insieme.
Ad esempio, ci sono infiniti numeri naturali che rendono vera la proposizione **g.**, ma non tutti i numeri la verificano.
In matematica si possono esprimere queste due situazioni introducendo dei simboli detti quantificatori.

■ Il **quantificatore universale**, indicato con il simbolo

$$\forall \qquad \text{(si legge «per ogni», «tutti»),}$$

esprime il fatto che una proprietà è vera per tutti gli elementi x di un insieme U.

■ Il **quantificatore esistenziale**, indicato con il simbolo

$\exists$ (si legge «esiste», «c'è qualche», «alcuni»),

esprime il fatto che una proprietà è vera per almeno un elemento x di un insieme U; garantisce dunque l'esistenza di un tale x.

Proviamo a riscrivere le proposizioni che hai letto all'inizio del paragrafo usando i quantificatori.

a. $\forall\ x \in \{\text{uomini}\}$, x è mortale

b. non $\forall\ x \in \{\text{animali}\}$, x ha le ali

c. $\exists\ x \in \{\text{animali}\}$, x ha le ali

d. $\forall\ x \in Q^- \ \wedge\ \forall\ y \in Q^+,\ \ x < y$

e. $\exists\ x \in Q$, x è positivo

f. non $\forall\ x \in N$, x è pari

g. $\exists\ x\ \in N$, x è pari.

Una forma equivalente ai casi ***b.*** *e* ***f.*** *è la seguente che trasforma il simbolo non $\forall$ nel simbolo $\exists$:*

b. *$\exists x \in \{\text{animali}\}$, x non ha le ali*

f. *$\exists x \in N$, x non è pari.*

Il simbolo $\nexists$ esprime la negazione di $\exists$; significa «non esiste», «non c'è alcuno».

Diremo per esempio che:

$\nexists x \in Q$, tale che $x^2 = 2$: «non esiste un x razionale il cui quadrato è 2»

$\nexists x \in \{\text{uomini}\}$, tale che x è immortale: «non esiste un uomo che sia immortale»

$\nexists x \in N$, tale che $x + 7 = 2$: «non c'è alcun numero naturale x che addizionato a 7 dia come risultato 2».

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La scrittura in forma simbolica della proposizione «c'è almeno un numero intero che sommato a 15 dà 8» è:

a. $\forall x \in Z,\ x + 8 = 15$ **b.** $\exists x \in Z,\ x + 15 = 8$

c. $\exists x \in N,\ x + 15 = 8$ **d.** $x \in N,\ x + 15 = 8$.

2. La scrittura in forma simbolica della proposizione «non tutti i numeri razionali sono positivi» è:

a. non $\exists x \in Q,\ x > 0$ **b.** $\forall x \in Q,\ x \leq 0$

c. non $\forall x \in Q,\ x > 0$ **d.** $\exists x \in Q,\ x \leq 0$.

6. IL RAGIONAMENTO LOGICO E LA DEDUZIONE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 39

Siamo finalmente nella condizione di poter affrontare il discorso sulla conduzione corretta di un ragionamento, anche se non è certamente possibile essere esaustivi sull'argomento che comporta conoscenze molto più ampie di quelle che abbiamo.

Il problema che vogliamo affrontare è dunque il seguente:

se sappiamo che alcune proposizioni sono vere e queste costituiscono la premessa di un ragionamento, quali sono le conseguenze logiche che si possono trarre?

La risposta a questa domanda è data da alcune regole di deduzione.

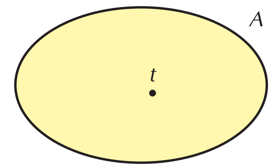
6.1 La regola di particolarizzazione

Tutti i pesci vivono nell'acqua — premessa vera

quindi Lillo, che è il mio pesce rosso, vive nell'acqua. — conseguenza vera

Questo ragionamento si basa sulla seguente considerazione (***figura 4***):

Figura 4



> se per tutti gli x di un insieme A vale la proprietà p, allora per un particolare elemento t di A vale p:
>
> $\forall x \in A, \quad p(x)$ è V $\quad \wedge \quad t \in A \qquad \Longrightarrow \qquad p(t)$ è V.

Non fare confusione fra i simboli:

- *$\rightarrow$ è un connettivo che rappresenta l'implicazione materiale*
- *$\Longrightarrow$ rappresenta la deduzione logica e si applica ad un ragionamento*

Il simbolo $\Longrightarrow$ indica la deduzione logica.
Nel caso dell'esempio, A è l'insieme dei pesci, p è la proprietà enunciata dal predicato "vivere nell'acqua", t è il pesce rosso Lillo.
Notiamo che A è un sottoinsieme dell'insieme di verità definito da p.
Riferendoci all'esempio, ci sono altri elementi che vivono nell'acqua oltre ai pesci.

6.2 Il modus ponens

Se Leo è un gatto allora è un felino.

Ma Leo è un gatto.

Allora è un felino.

Questo ragionamento è formato da due sole proposizioni: a: «Leo è un gatto» b: «Leo è un felino» e ci dice che:

> se è vera l'implicazione $a \rightarrow b$ ed è vera la premessa a, allora è vera anche la conseguenza b.

Il modus ponens si può rappresentare anche con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \rightarrow b & \textit{premessa} \\ a & \textit{premessa} \\ \hline b & \textit{deduzione} \end{array}$$

La correttezza di questa deduzione è confermata dalla tavola di verità dell'implicazione che puoi vedere a lato.
Il solo caso in cui $a \rightarrow b$ è V e anche a è V è quello che corrisponde alla prima riga della tabella dalla quale si deduce che anche b deve essere vero.
Si è soliti rappresentare questo tipo di ragionamento con la scrittura

$$(a \rightarrow b) \wedge a \quad \Longrightarrow \quad b$$

nella quale si evidenzia che le due proposizioni $a \rightarrow b$ e a sono le premesse, mentre b è la deduzione logica.

a	b	$a \rightarrow b$
$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il modus ponens e i teoremi

Un **teorema** è una proposizione che esprime proprietà generali di oggetti, per esempio figure geometriche o numeri, quando queste presentano determinate caratteristiche.
I teoremi si possono sempre scrivere sotto forma di implicazione materiale, dove le proposizioni che costituiscono la premessa si chiamano **ipotesi** e le proposizioni che rappresentano la conseguenza si chiamano **tesi**.

Sono per esempio teoremi alcune proprietà che conosci dalla scuola di base:

- se un triangolo è isoscele (ipotesi), allora ha due angoli congruenti (tesi);

In un teorema, quando un'ipotesi I implica una tesi T, si dice che:

- *I è condizione sufficiente per T*
- *T è condizione necessaria per I*

- se la somma delle cifre di un numero è un multiplo di 3 (ipotesi), allora quel numero è divisibile per 3 (tesi).

Il sapere che le precedenti due proposizioni sono vere e il sapere che un oggetto particolare rende vera l'ipotesi, permette di affermare che quell'oggetto rende vera anche la tesi.
Relativamente ai due teoremi precedenti si può quindi dire per esempio che:

- se in una figura geometrica c'è un particolare triangolo che è isoscele, allora si può affermare che quel triangolo ha due angoli congruenti
- il numero 37215, la cui somma delle cifre vale 18, è divisibile per 3.

6.3 Il modus tollens

Se un numero è divisibile per 10, allora è pari

c'è un numero che non è pari

quindi quel numero non è divisibile per 10.

Questo ragionamento è formato da due proposizioni: a: «il numero dato è divisibile per 10», b: «il numero è pari» e ci dice che:

> se è vera l'implicazione $a \to b$ ed è vera la proposizione $\overline{b}$ (cioè b è F), allora è vera anche la proposizione $\overline{a}$ (cioè a è F).

Il modus tollens si può rappresentare anche con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \to b & \text{premessa} \\ \overline{b} & \text{premessa} \\ \hline \overline{a} & \text{deduzione} \end{array}$$

La correttezza di questa deduzione è confermata dalla tavola di verità dell'implicazione che vedi a lato.
Il solo caso in cui $a \to b$ è V e b è F è quello che corrisponde all'ultima riga della tabella dalla quale si deduce che anche a deve essere falsa.
Si è soliti rappresentare questo tipo di ragionamento con il seguente schema

$$(a \to b) \wedge \overline{b} \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$$

nel quale si evidenzia che le due proposizioni $a \to b$ e $\overline{b}$ sono le premesse, mentre $\overline{a}$ è la deduzione logica.

a	b	$a \to b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	**F**	**V**

Il modus tollens e i teoremi

Questo schema di ragionamento è quello che ci permette di dire che se un oggetto non verifica la tesi di un teorema, non può avere le caratteristiche specificate dall'ipotesi. Riferendoci ancora ai teoremi precedenti:

- se un triangolo non ha due angoli uguali, allora non può essere isoscele;
- se un numero non è divisibile per 3, allora la somma delle sue cifre non può essere un multiplo di 3.

6.4 La deduzione per assurdo

Un ulteriore schema logico fondamentale è il seguente:

> se è vera l'implicazione $a \to \overline{b}$ ed è vera la proposizione b, allora è vera anche la proposizione $\overline{a}$.
>
> In simboli: $(a \to \overline{b}) \wedge b \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$

La deduzione per assurdo si può rappresentare con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \to \overline{b} & \text{premessa} \\ b & \text{premessa} \\ \hline \overline{a} & \text{deduzione} \end{array}$$

La validità di questo schema può essere dedotta ancora una volta analizzando la tavola di verità dell'implicazione riportata a lato.

Questo tipo di deduzione viene usata nella conduzione delle dimostrazioni di molti teoremi e avrai occasione di applicarla soprattutto in geometria.

a	b	$a \to \overline{b}$
V	V	F
V	F	V
$\boxed{\text{F}}$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
F	F	V

ESEMPI

1. Se un quadrilatero è un parallelogramma, allora i lati opposti sono congruenti; *ABCD* è un parallelogramma. Che cosa si può dedurre?

Se a: «un quadrilatero è un parallelogramma» e b: «il quadrilatero ha i lati opposti congruenti» la premessa si può scrivere in questo modo: $(a \to b) \wedge a$

Applicando la regola del modus ponens deduciamo che *ABCD* ha i lati opposti congruenti.

2. Se due rette si intersecano in un punto allora, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni che non sono congruenti; due rette r e s, tagliate da una trasversale, formano angoli congruenti. Che cosa si può dire di r e s?

Proposizione a: «due rette si intersecano in un punto»
Proposizione b: «le rette, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni congruenti»
Premessa: $(a \to \overline{b}) \wedge b$
Si tratta allora dello schema di deduzione per assurdo; la sola conseguenza che si può trarre è $\overline{a}$, quindi che le due rette non si intersecano in un punto.

3. Se Maria ha sposato Carlo, allora è ricca; ma Maria non è ricca. Che cosa si può dedurre?

Se a: «Maria ha sposato Carlo» e b: «Maria è ricca»
lo schema di ragionamento è quello del modus tollens: $(a \to b) \wedge \overline{b} \implies \overline{a}$
Dobbiamo quindi concludere che Maria non ha sposato Carlo.

4. Se Anna ha una laurea in lingue orientali, allora sa parlare in cinese; ma Anna non è laureata in lingue orientali. Si può dedurre che Anna non sa parlare in cinese?

Purtroppo questo ragionamento non rientra in nessuno degli schemi che abbiamo studiato e non è possibile fare alcuna deduzione. In effetti Anna potrebbe saper parlare cinese anche senza essere laureata in lingue orientali, magari perché è cinese o perché ha vissuto in Cina per molti anni; non è però da escludere che non sappia pronunciare nemmeno una parola di cinese.

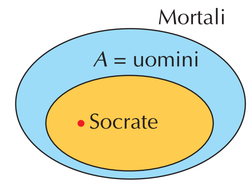
APPROFONDIMENTI

IL SILLOGISMO

Si tratta di un tipo di ragionamento che risale al filosofo greco Aristotele (384-322 a.C), che è considerato il padre della logica classica e le cui conclusioni hanno influenzato per duemila anni lo sviluppo della filosofia. Lo schema di ragionamento di un sillogismo consta di due affermazioni che si chiamano **premesse**, dalle quali si deduce una terza affermazione che è la **conclusione**.

premessa maggiore
premessa minore
___
conclusione

Il più famoso sillogismo di Aristotele recita così:

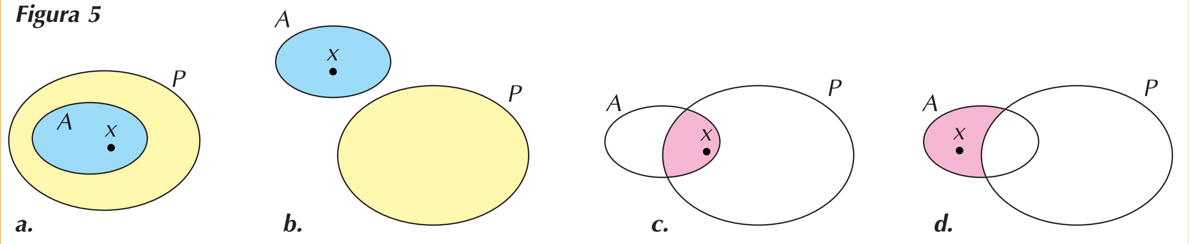


Gli uomini sono mortali.	premessa maggiore
Socrate è un uomo,	premessa minore
dunque Socrate è mortale	conclusione

Per verificare la correttezza di questo ragionamento basta applicare la regola di particolarizzazione: «essere mortali» è il predicato che enuncia la proprietà p, A è l'insieme degli uomini i cui elementi x soddisfano p, Socrate è l'elemento t che appartiene ad A.
Le premesse e la conclusione di un sillogismo possono essere enunciate in forme diverse; se indichiamo con p una certa proprietà e con P il suo insieme di verità, i casi che si possono presentare sono i seguenti.

- Forma **universale affermativa**
  E' del tipo: tutti gli x di un insieme A soddisfano p.
  Dal punto di vista insiemistico, questo significa che $A \subseteq P$ (***figura 5a***).
- Forma **universale negativa**
  E' del tipo: nessun x di un insieme A soddisfa p.
  Dal punto di vista insiemistico, questo significa che $A \cap P = \varnothing$ e che quindi x appartiene al complementare di A rispetto al dominio di p (***figura 5b***).
- Forma **particolare affermativa**
  E' del tipo: esiste un x di un insieme A che soddisfa p.
  Dal punto di vista insiemistico, questo significa che $A \cap P \neq \varnothing$ e che $x \in A \cap P$ (***figura 5c***).
- Forma **particolare negativa**
  E' del tipo: esiste un x di un insieme A che non soddisfa p.
  Dal punto di vista insiemistico, questo significa che $A - P \neq \varnothing$ e che $x \in A - P$ (***figura 5d***).

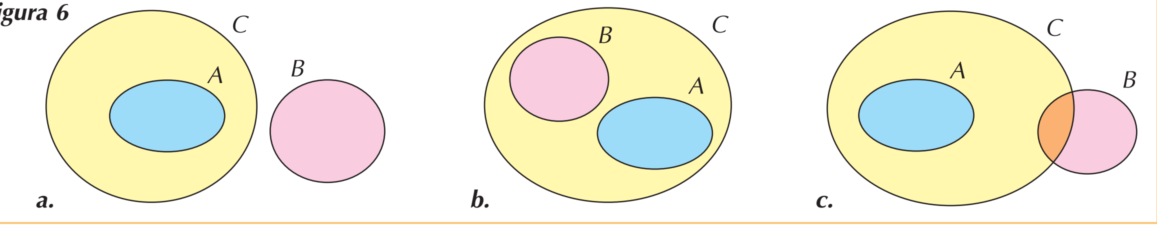
Figura 5



Per verificare la validità di un sillogismo ci si può servire delle relazioni insiemistiche evidenziate. Per esempio, consideriamo il seguente schema:
nessun x è y
tutti gli x sono z
dunque qualche z non è y.

Siano A l'insieme degli x, B l'insieme degli y, C l'insieme degli z. La premessa maggiore ci dice che A e B sono disgiunti, la premessa minore ci dice che A è un sottoinsieme di C, dobbiamo verificare che qualche elemento di C non appartiene a B. La cosa è evidente in quanto gli elementi di A sono anche elementi di C e non appartengono a B (in ***figura 6*** tre situazioni che si possono presentare).

Figura 6



Il ragionamento è dunque valido e si può quindi, per esempio, affermare che:

nessun rombo è inscrittibile in una circonferenza

tutti i rombi sono quadrilateri

dunque qualche quadrilatero non è inscrittibile in una circonferenza.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Se x è un numero primo e non è 2, allora x è dispari; ma x non è dispari.
In base agli schemi di ragionamento studiati si può dedurre che:

a. x è un numero primo
b. x non è un numero primo
c. x è pari
d. non si possono fare deduzioni.

2. Sono dati un frillo e un frullo. Considera la premessa: *se x è un frillo, allora possiede un frullo; x non è un frillo*. Che cosa si può dire di x?

a. che x ha un frullo **b.** che x non ha un frullo **c.** che non si può sapere se x ha o non ha un frullo.

Nel volume Laboratorio e complementi trovi...

- il laboratorio di informatica con Derive ed Excel
- la scheda di approfondimento sugli sviluppi della logica e la logica fuzzy

La risposta al quesito iniziale

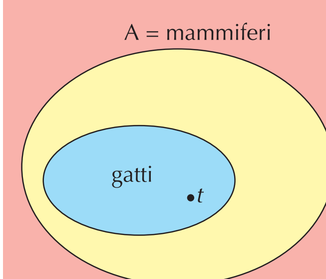
I due ragionamenti portati come esempi all'inizio del capitolo rientrano nello schema di un sillogismo:

Tutti i mammiferi allattano i piccoli

I gatti sono mammiferi

I gatti allattano i piccoli.

«Allattare i piccoli» è il predicato che enuncia la proprietà p; A è l'insieme i cui elementi x soddisfano la proprietà p (insieme dei mammiferi); i gatti costituiscono un sottoinsieme di A, quindi tutti i suoi elementi t appartengono ad A.

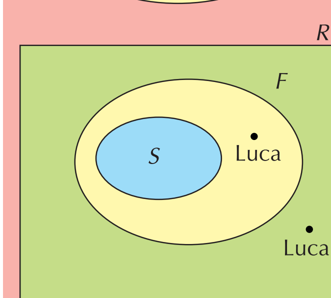


I ragazzi che hanno lo scooter sono felici

Io non ho lo scooter

quindi non sono felice.

«Essere felici» è il predicato che enuncia la proprietà p; nell'ambito dell'insieme R dei ragazzi ci sono quelli che sono felici e quindi soddisfano p (insieme F) e quelli che non lo sono (il complementare di F rispetto a R); i ragazzi che hanno lo scooter (insieme S), poiché sono felici, costituiscono un sottoinsieme di F. Si può ritenere che il ragionamento non sia corretto in quanto il ragazzo in questione, chiamiamolo Luca, può non appartenere a F e quindi essere infelice (zona verde nella figura), ma può anche appartenere all'insieme $F - S$ (zona in giallo nella figura) e quindi essere ugualmente felice.



I concetti e le regole

Le proposizioni

Una **proposizione** è una frase di senso compiuto della quale si può stabilire se è vera o se è falsa.
Le proposizioni obbediscono a due principi fondamentali:

- **Principio di non contraddizione**: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.
- **Principio del terzo escluso**: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

Le operazioni con le proposizioni

Con le proposizioni si possono eseguire delle operazioni logiche mediante i **connettivi**:

- la **negazione** di un enunciato a è l'enunciato $\overline{a}$ (o anche $\neg a$) che muta il valore di verità di a
- la **congiunzione** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \wedge b$ che si considera vero solo se sono veri sia a che b
- la **disgiunzione inclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \vee b$ che si considera falso solo se sono falsi sia a che b
- la **disgiunzione esclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \dot{\vee} b$ che si considera vero solo se a e b hanno valori di verità diversi
- l'**implicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \to b$ che si considera falso solo se a è vero e b è falso
- la **coimplicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \leftrightarrow b$ che si considera vero solo se a e b hanno lo stesso valore di verità.

Le espressioni logiche e l'equivalenza

Con i connettivi si possono costruire espressioni logiche fra enunciati (che sono gli operandi dell'espressione) il cui valore di verità si determina analizzando le possibili combinazioni di Vero e Falso degli operandi.
Quando un'espressione logica è sempre vera al variare del valore di verità dei suoi operandi si parla di **tautologia**; quando è sempre falsa si dice che è una **contraddizione**.
Due espressioni logiche con gli stessi operandi che hanno la stessa tavola di verità si dicono **logicamente equivalenti**; in particolare sono logicamente equivalenti:

- l'implicazione $a \to b$ e la sua contronominale $\overline{b} \to \overline{a}$
- le espressioni $\overline{a \wedge b}$ e $\overline{a} \vee \overline{b}$ (prima legge di De Morgan)
- le espressioni $\overline{a \vee b}$ e $\overline{a} \wedge \overline{b}$ (seconda legge di De Morgan)

I predicati e gli enunciati aperti

Un **predicato** è la proprietà che esprime una caratteristica relativa ad alcuni elementi di un insieme.
Quando un predicato lega fra loro degli argomenti alcuni dei quali sono delle variabili, si parla di **enunciato aperto o proposizione aperta**.
L'insieme dei valori che possono assumere le variabili costituisce il **dominio** della proposizione aperta; il sottoinsieme del dominio che rende l'enunciato aperto una proposizione vera si dice **insieme di verità**.
Anche con gli enunciati aperti si possono eseguire le stesse operazioni che si eseguono con le proposizioni; in particolare, indicati con la stessa lettera (maiuscola) del proprio enunciato gli insiemi di verità e con D il dominio, si ha che:

- l'insieme di verità della negazione di un enunciato $p(x)$ è l'insieme $\overline{P}$ complementare di P rispetto a D
- l'insieme di verità della congiunzione $p(x) \wedge q(x)$ di due enunciati è l'insieme $P \cap Q$
- l'insieme di verità della disgiunzione inclusiva $p(x) \vee q(x)$ di due enunciati è l'insieme $P \cup Q$.

I quantificatori

Un enunciato aperto esprime spesso una proprietà che alcuni o tutti gli elementi di un insieme possiedono; per esprimere queste proprietà si usano allora i quantificatori:

- il **quantificatore universale**, indicato dal simbolo $\forall$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per tutti i valori che le variabili possono assumere
- il **quantificatore esistenziale**, indicato dal simbolo $\exists$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per almeno uno dei valori che la variabile può assumere.
  Per indicare che una proprietà p non è verificata da nessuno dei valori della variabile si usa la negazione di questo quantificatore: $\nexists x$.

Il ragionamento logico

Esistono alcune regole che consentono di trarre deduzioni vere da premesse vere:

- la **regola di particolarizzazione** che si può sintetizzare nel seguente schema: $\forall x \in A,\ p(x)$ è V $\wedge\ t \in A \implies p(t)$ è V
- il **modus ponens** che si può sintetizzare nel seguente schema: $(a \to b) \wedge a \implies b$
- il **modus tollens** che si può sintetizzare nel seguente schema: $(a \to b) \wedge \overline{b} \implies \overline{a}$
- la **deduzione per assurdo** che si può sintetizzare nel seguente schema: $\left(a \to \overline{b}\right) \wedge b \implies \overline{a}$.

La logica

LE PROPOSIZIONI

la teoria è a pag. 2

RICORDA

- Si chiama ***proposizione*** o ***enunciato*** una frase di senso compiuto della quale si può dire se è vera (V) o se è falsa (F).
- Le proposizioni devono soddisfare i seguenti principi:
  Principio di non contraddizione: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.
  Principio del terzo escluso: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

Comprensione della teoria

1 «Verrò a casa tua domani» e «Egli mi disse: "verrò a casa tua domani"» sono entrambe proposizioni? Perché?

2 Durante un interrogatorio, il testimone oculare di un efferato delitto rivela al commissario Indagoni:
«Ho visto e non ho visto.»
Il commissario si gira verso l'attendente e commenta:
«Metti a verbale che il testimone non è attendibile.»
Come si giustifica la reazione di Indagoni?

Applicazione

3 Stabilisci quali delle seguenti frasi sono proposizioni:

a. «$\frac{1}{3}$ è minore di $\frac{1}{2}$». SI NO
b. «Quando sarai interrogato?». SI NO
c. «Dante ha scritto *I Promessi Sposi*». SI NO
d. «Il gatto è un mammifero». SI NO
e. «Le galline sono animali da cortile». SI NO
f. «Svegliatemi presto domani». SI NO
g. «Ragioniamo con calma». SI NO
h. «Gli extraterrestri esistono». SI NO
i. «Gli angeli sono di sesso maschile». SI NO

4 Individua il predicato e gli argomenti delle seguenti proposizioni e determina poi il loro valore di verità.

a. «I cani abbaiano». V F
b. «Caino è il fratello di Abele». V F

c. «90 è un numero primo». V F
d. «3 è un numero dispari». V F
e. «Il gatto mangia il topo». V F
f. «*a, b, ..., z* sono lettere dell'alfabeto italiano». V F
g. «Un insieme non vuoto ha almeno un elemento». V F
h. «3 è maggiore di 8». V F
i. «$4 + 8 \neq 3 + 5$». V F

5 Stabilisci quali delle seguenti frasi sono proposizioni e di esse individua il predicato e gli argomenti:

a. «7 è un numero intero»
b. «Gli italiani pagano le tasse».
c. «$142 > 56$».
d. «Chiara e Andrea si sposano domani».
e. «Il coro ha cantato molto bene».
f. «Sandokan è un personaggio de *I Promessi Sposi*».

6 Dopo aver stabilito quali delle seguenti frasi sono proposizioni, individua il predicato e gli argomenti e determinane il valore di verità.

a. «Nel compito di matematica ho preso 6».
b. «Il libro che mi hai dato è bellissimo».
c. «Mia sorella si chiama Lucia».
d. «I libri di matematica sono interessanti».
e. «$13 \cdot 8 = 100$».
f. «3 è positivo».
g. «Spegni la televisione quando esci».

7 Individua fra le proposizioni che seguono quelle atomiche e quelle molecolari. Di queste ultime, stabilisci da quali proposizioni atomiche sono composte.

a. «Piove e fa freddo».
b. «Se $3 > 2$, anche $6 > 4$».
c. «Il treno parte».
d. «Sono arrivato tardi e non ho potuto entrare».
e. «$7 > 10$ e $8 > 4$ ma $5 < 9$».
f. «$3 + 2 = 5$ ma $3 + 7 \neq 5$».
g. «L'inverno è più freddo dell'estate».
h. «Agata Christie è una scrittrice di libri gialli».
i. «Questa sera alla televisione c'è un film di fantascienza».
l. «*Gli uccelli* è un famoso film di Hitchcock che ha vinto molti premi».
m. «Se nell'emisfero nord è inverno, in quello sud è estate».

LE OPERAZIONI CON LE PROPOSIZIONI

la teoria è a pag. 4

RICORDA

Le operazioni logiche fondamentali che si possono eseguire sulle proposizioni sono:

- la **negazione** che opera su una sola proposizione *a* e ne cambia il valore di verità; si indica con $\overline{a}$
- la **congiunzione** che opera su due proposizioni *a* e *b* ed è V solo se entrambe le proposizioni sono V; si indica con $a \wedge b$
- la **disgiunzione inclusiva** che opera su due proposizioni *a* e *b* ed è V solo se almeno una delle proposizioni è V; si indica con $a \vee b$

Le altre operazioni introdotte rappresentano un modo abbreviato di comporre le precedenti e sono:

- la **disgiunzione esclusiva** che opera su due proposizioni *a* e *b* ed è V solo se una delle proposizioni è V e l'altra è F; si indica con $a \dot{\vee} b$
- l'**implicazione** che opera su due proposizioni *a* e *b* ed è F solo se la prima proposizione è V e la seconda è F; si indica con $a \rightarrow b$
- la **coimplicazione** che opera su due proposizioni *a* e *b* ed è V se le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità; si indica con $a \leftrightarrow b$

Comprensione della teoria

8 Stabilisci quali fra le seguenti proposizioni sono corrette.

a. Una tavola di verità visualizza i risultati di un'operazione logica.
b. Una tavola di verità è una tabella nella quale sono riportati i valori veri di una proposizione.
c. Il valore di verità di una proposizione molecolare si determina analizzando i valori di verità delle proposizioni atomiche che la compongono.
d. Se una proposizione è vera, in qualche caso particolare può anche essere falsa.

9 Si può dire che la negazione della proposizione «il gatto di Anna è nero» è «il gatto di Anna è bianco»? Motiva la tua risposta.

10 La negazione della proposizione «In Lombardia la nebbia è sempre fitta» è:
a. «In Lombardia la nebbia è quasi sempre leggera»
b. «In Lombardia non c'è mai nebbia fitta»
c. «In Lombardia la nebbia non è sempre fitta»
d. «In Lombardia qualche volta non c'è nebbia».

11 Componendo con un connettivo due proposizioni a e b si ottiene una terza proposizione c. Barra le caselle giuste scegliendo fra quelle elencate l'operazione logica che soddisfa le richieste.

a. rende c vera solo se a e b sono entrambe vere $\boxed{\vee}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{\dot\vee}\ \boxed{\rightarrow}$
b. rende c falsa solo se a e b sono entrambe false $\boxed{\vee}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{\dot\vee}\ \boxed{\rightarrow}$
c. rende c falsa solo se a è vera e b è falsa $\boxed{\vee}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{\dot\vee}\ \boxed{\rightarrow}$
d. rende c vera solo se a e b hanno valori di verità diversi $\boxed{\vee}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{\dot\vee}\ \boxed{\rightarrow}$
e. rende c vera se almeno una delle proposizioni a e b è vera. $\boxed{\vee}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{\dot\vee}\ \boxed{\rightarrow}$

12 Nella disgiunzione esclusiva $a \dot\vee b$, si sa che b è vera; allora $a \dot\vee b$ è vera:
a. solo se a è vera **b.** solo se a è falsa
c. qualunque sia il valore di verità di a **d.** mai

13 Nell'implicazione $a \rightarrow b$, si sa che b è vera; allora $a \rightarrow b$ è vera:
a. solo se a è vera **b.** solo se a è falsa
c. qualunque sia il valore di verità di a **d.** mai

14 Nella coimplicazione $a \leftrightarrow b$, si sa che b è falsa; allora $a \leftrightarrow b$ è vera:
a. solo se a è vera **b.** solo se a è falsa
c. qualunque sia il valore di verità di a **d.** mai

15 Si sa che $a \rightarrow b$ è una proposizione vera e che b è falsa; della proposizione $b \rightarrow a$ si può dire che:
a. è vera **b.** è falsa **c.** non si può sapere se è vera o falsa

Applicazione

La negazione

16 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo la **negazione** delle seguenti proposizioni.
a: «Il romanzo che sto leggendo ha 243 pagine»
b: «Il canarino è nella gabbia»
c: «$10 + 5$ è maggiore di 3»
d: «$\frac{1}{2}$ è minore di 1»

Ricordiamo che la negazione di una proposizione si esegue negando la forma verbale o anteponendo la locuzione "non è vero che" alla proposizione; quindi:

la negazione della proposizione a è $\overline{a}$: «Il romanzo che sto leggendo non ha 243 pagine»
la negazione della proposizione b è $\overline{b}$: «Il canarino non è nella gabbia»
la negazione della proposizione c è $\overline{c}$: «$10 + 5$ non è maggiore di 3»
la negazione della proposizione d è $\overline{d}$: «$\frac{1}{2}$ non è minore di 1».

17 Scrivi la negazione delle seguenti proposizioni e indica il loro valore di verità.
a: «7 è un numero primo»
b: «Un rettangolo ha quattro angoli retti»
c: «$2 + 3 = 7$»
d: «la Terra è un pianeta del sistema solare»

18 Quali significati può avere la proposizione: «non è vero che non ho studiato nessuna pagina del capitolo di storia»?
a. Che ho studiato alcune pagine del capitolo.
b. Che ho studiato tutte le pagine del capitolo.
c. Che non ho studiato nessuna pagina del capitolo.

19 Considera la seguente proposizione p: «Maria e Franco verranno entrambi alla tua festa domani». Costruisci $\overline{p}$. Supponi che $\overline{p}$ sia vera; quale dei seguenti casi può essere vero?
a. «Maria verrà da sola alla festa».
b. «Franco verrà da solo alla festa».
c. «Né Maria né Franco verranno alla festa».
d. «Maria e Franco verranno insieme alla festa».

La congiunzione e la disgiunzione

20 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo le seguenti proposizioni:
a: «Luca ha comprato un iPod nano» b: «Marco possiede un cellulare di ultima generazione»
Costruiamo le proposizioni $a \vee b$, $a \dot{\vee} b$ e $a \wedge b$ e stabiliamo in quali casi esse sono vere.

- $a \vee b$: «Luca ha comprato un iPod nano oppure Marco possiede un cellulare di ultima generazione»

  La tavola di verità della disgiunzione inclusiva ci dice che affinché $a \vee b$ sia V almeno una delle due proposizioni deve essere V; quindi potrebbe essere che:
  - Luca abbia un iPod e Marco abbia un cellulare
  - Luca abbia un iPod e Marco non abbia un cellulare
  - Luca non abbia un iPod e Marco abbia un cellulare.

  Non può capitare che Luca non abbia un iPod e Marco non abbia un cellulare.

- $a \dot{\vee} b$ «o Luca ha comprato un iPod nano oppure Marco possiede un cellulare di ultima generazione»

  La tavola di verità della disgiunzione esclusiva ci dice che affinché $a \dot{\vee} b$ sia V una sola delle due proposizioni deve essere V; quindi potrebbe essere che:

- Luca abbia un iPod e Marco non abbia un cellulare
- Luca non abbia un iPod e Marco abbia un cellulare.

Non può capitare che Luca non abbia un iPod e Marco non abbia un cellulare o che entrambi abbiano l'oggetto dichiarato.

■ $a \wedge b$: «Luca ha comprato un iPod nano e Marco possiede un cellulare di ultima generazione» La tavola di verità della congiunzione ci dice che affinché $a \wedge b$ sia V entrambe le proposizioni devono essere V; il solo caso che può capitare è quindi che:

- Luca abbia un iPod e Marco abbia un cellulare.

21 Considera le proposizioni a: «Anna ha 15 anni» e b: «Flavia e Anna sono amiche». In quali casi $a \wedge b$ è vero? In quali è falso?

22 Date le proposizioni a: «3 è un numero dispari» e b: «3 è un numero primo» com'è $a \wedge b$? E $\overline{a \wedge b}$?

23 Considera le proposizioni a e b dei due esercizi precedenti, costruisci le proposizioni $a \vee b$ e determina il loro valore di verità.

24 Considera le proposizioni a: «Francesca è abbronzata» e b: «Maria ha i capelli lunghi», e supponi che siano entrambe vere. Scrivi in simboli le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. «Francesca è abbronzata e Maria non ha i capelli lunghi».
b. «Francesca è abbronzata e Maria ha i capelli lunghi».
c. «Francesca non è abbronzata e Maria ha i capelli lunghi».
d. «Francesca non è abbronzata e Maria non ha i capelli lunghi».

25 Date le proposizioni a: «18 è multiplo di 2», b: «18 è multiplo di 3» e c: «18 è multiplo di 8» esprimi a parole le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. $a \wedge b$ **b.** $b \vee \overline{c}$ **c.** $\overline{a} \wedge c$ **d.** $\overline{b \vee c}$.

26 Date le seguenti proposizioni atomiche a: «Marta va al cinema», b: «Giovanni va a scuola», c: «Carlo va al mare», e supponendo che a sia V, b sia F e c sia V, esprimi a parole le seguenti proposizioni molecolari e determina il loro valore di verità:

a. $\overline{a}$ **b.** $a \wedge b$ **c.** $b \vee c$ **d.** $\overline{b} \wedge \overline{c}$ **e.** $\overline{a} \wedge \overline{b}$ **f.** $\overline{a \wedge c}$ **g.** $\overline{b} \vee c$

27 Siano a: «sto navigando in Internet» (V), b: «sto scrivendo un sms con un cellulare» (F), c: «sto dormendo» (F). Esprimi a parole le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. $a \dot{\vee} b$ **b.** $b \wedge \overline{c}$ **c.** $a \wedge \overline{b}$ **d.** $(a \vee b) \wedge \overline{c}$.

28 Considera p: «Vado in auto» e q: «Vado in treno». Quando $p \dot{\vee} q$ è falsa? Quando è vera?

29 Considera p: «Studio» e q: «Guardo la televisione». Supponi che $p \dot{\vee} q$ sia vera. Che cosa si può dire di p e q?

30 Date le proposizioni:

a: «Mario ha gli occhi verdi» (V)
b: «Mario ha i capelli rossi» (V)

scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. «Mario ha gli occhi verdi e i capelli rossi».
b. «Mario non ha gli occhi verdi ma ha i capelli rossi».
c. «Non è vero che Mario ha gli occhi verdi e i capelli rossi».
d. «O Mario ha gli occhi verdi o non è vero che ha i capelli rossi».
e. «Mario ha gli occhi verdi ma non ha i capelli rossi».

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la seguente proposizione: «Se scrivi una lettera ad Angela, salutamela tanto»
Individuiamo le proposizioni atomiche che la compongono e riscriviamola in forma simbolica.

Poiché ci sono due forme verbali, due sono anche le proposizioni atomiche:

$\boxed{\text{Scrivi una lettera ad Angela}} \to a$, $\boxed{\text{salutamela tanto}} \to b$

L'operazione logica utilizza la particella *se*, si tratta quindi di una implicazione che, in forma simbolica, possiamo scrivere: $a \to b$.

32 Date le seguenti proposizioni a: «9 è multiplo di 3» e b: «12 è un numero pari» esprimi a parole le seguenti proposizioni e determina il loro valore di verità:

a. $a \to b$ **b.** $\overline{a} \to b$ **c.** $\overline{a \to b}$ **d.** $a \to \overline{b}$ **e.** $a \leftrightarrow b$

33 Siano a: «Titti è un canarino giallo», b: «Silvestro è un gatto nero», c: «Silvestro vuole mangiare Titti», esprimi a parole le seguenti proposizioni e determina il loro valore di verità supponendo che le tre proposizioni date siano vere:

a. $a \to c$ **b.** $(a \wedge b) \to c$ **c.** $a \to b$ **d.** $c \leftrightarrow b$ **e.** $(a \wedge \overline{b}) \to \overline{c}$

34 Date le proposizioni tutte vere a: «gioco», b: «mi diverto», c: «studio», d: «imparo», esprimi a parole le seguenti proposizioni e determinane il valore di verità:

a. $a \wedge \overline{d}$ **b.** $c \to d$ **c.** $\overline{c} \to a$ **d.** $a \dot{\vee} c$ **e.** $(c \wedge \overline{b}) \to \overline{d}$

35 **ESERCIZIO GUIDA**

Anna afferma: "Se $1 + 1 = 2$ allora io sono una strega". Anna è o non è una strega?

Siano a: «$1 + 1 = 2$» e b: «io sono una strega»
La proposizione a è V e se Anna fa questa affermazione è convinta che sia vera; allora b, in base alla tavola di verità dell'implicazione deve essere vera. Quindi Anna è una strega.

a	b	$a \to b$
$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	F
F	V	V
F	F	V

36 Un politico afferma: "Se tutti fossero onesti e pagassero le tasse, si potrebbero ridurre le aliquote". Supposto che sia falso che tutti i cittadini sono onesti e pagano le tasse, che cosa si può dire della frase del politico?

37 Paperino dice allo zio Paperone: "Se mi presti il tuo cent portafortuna, anch'io diventerò ricco". Conoscendo lo zio Paperone, Paperino non avrà mai la moneta portafortuna. E' possibile che Paperino diventi ricco?

38 Pippo dice al suo cane Pluto: "Smetti di abbaiare o ti faccio scendere dalla macchina". Se Pluto non smette di abbaiare che cosa farà Pippo?

39 Quando Angelo era piccolo diceva sempre «Se da grande diventerò molto alto, farò il corazziere». Oggi Angelo fa l'avvocato. Che cosa si può dire della sua statura?

ESPRESSIONI LOGICHE ED EQUIVALENZE

la teoria è a pag. 8

RICORDA

- Componendo più proposizioni si ottiene qualcosa di simile alle espressioni con i numeri ed è per questo che si parla di espressioni logiche; per valutare il valore di verità di un'espressione logica si deve costruire la sua tavola di verità analizzando tutti i casi possibili.
- Le espressioni logiche che sono sempre vere qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che la compongono si dicono **tautologie**; una tautologia è quindi una verità assoluta.
- Le espressioni logiche che sono sempre false qualunque sia il valore di verità delle proposizioni che la compongono si dicono **contraddizioni**; una contraddizione è quindi una falsità assoluta.
- Due espressioni logiche formalmente diverse tra loro che operano sulle stesse proposizioni e che hanno la stessa tavola di verità rappresentano dal punto di vista logico la stessa cosa e di esse si dice che sono **equivalenti**. Fra le regole di equivalenza ricordiamo:
  - $a \dot\vee b = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$ $\quad a \rightarrow b = \overline{a} \vee b$ $\quad a \leftrightarrow b = (\overline{a} \vee b) \wedge (a \vee \overline{b})$
  - le due leggi di De Morgan: $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ $\quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Comprensione della teoria

40 Di un'espressione logica si sa che coinvolge 4 proposizioni e che la prima di esse è vera. I casi da rappresentare nella tavola di verità sono:
a. 16 **b.** 4 **c.** 8 **d.** non è possibile determinarlo

41 Di un'espressione logica che coinvolge 3 proposizioni si sa che una è vera e un'altra è falsa mentre non si sa nulla della terza. Quanti sono i casi che si devono predisporre nella tavola di verità?
a. 1 **b.** 2 **c.** 8 **d.** non è possibile determinarlo

42 In base alle proprietà delle operazioni logiche l'espressione $\overline{\overline{a} \vee b}$ è logicamente equivalente a:
a. $a \wedge b$ **b.** $a \wedge \overline{b}$ **c.** $a \vee \overline{b}$

43 In base alle proprietà delle operazioni logiche l'espressione $\overline{a \wedge \overline{b}}$ è logicamente equivalente a:
a. $a \vee \overline{b}$ **b.** $\overline{a} \wedge b$ **c.** $\overline{a} \vee b$

44 Scegli fra le seguenti proposizioni quelle che sono logicamente equivalenti a $a \rightarrow b$:
a. $\overline{a} \rightarrow \overline{b}$ **b.** $\overline{b} \rightarrow \overline{a}$ **c.** $\overline{b} \rightarrow a$ **d.** $\overline{a} \vee b$

Applicazione

45 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le proposizioni *a*: «7 è un numero primo», *b*: «7 è dispari», *c*: «$7 < -7$» e *d*: «7 è maggiore di qualsiasi numero negativo», scrivi per esteso le seguenti proposizioni composte e determinane il valore di verità.

a. $(a \wedge d) \rightarrow \overline{c}$ **b.** $b \vee \overline{a \wedge c}$ **c.** $(\overline{a} \wedge \overline{b}) \rightarrow (c \dot\vee d)$

a. La proposizione si enuncia in questo modo: «se 7 è un numero primo ed è dispari, allora 7 non è minore di −7». Per valutare il suo valore di verità, costruiamo una tabella con una sola riga nella quale riportare il valore di verità di ogni proposizione e quello dell'espressione richiesta:

a	c	d	$a \wedge d$	$\overline{c}$	$(a \wedge d) \rightarrow \overline{c}$
V	F	V	V	V	V

L'espressione considerata è quindi vera.
Prosegui allo stesso modo per gli altri casi.

46 Date le proposizioni:

a: «8 è multiplo di 2» b: «12 è multiplo di 8»
c: «12 è pari» d: «8 è dispari»
e: «12 > 8» f: «12 < 2»

scrivi per esteso le seguenti proposizioni composte e determinane il valore di verità:

a. $a \rightarrow \overline{d}$ **b.** $a \wedge (\overline{b} \vee d)$ **c.** $(e \wedge c) \rightarrow \overline{f}$
d. $c \rightarrow b$ **e.** $d \rightarrow \overline{a}$ **f.** $(a \wedge b) \rightarrow e$

Dati gli enunciati a e b, costruisci la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche.

47 **ESERCIZIO GUIDA**

$(a \rightarrow b) \wedge (a \wedge \overline{b})$

a	b	$(a \rightarrow b)$	$\overline{b}$	$(a \wedge \overline{b})$	$(a \rightarrow b) \wedge (a \wedge \overline{b})$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

48 $\overline{(a \vee b)} \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b})$

49 $(a \rightarrow \overline{b}) \vee (\overline{a} \rightarrow b)$

50 $(a \vee \overline{b}) \rightarrow \overline{a}$

51 $(\overline{a \vee b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$

52 $(a \wedge b) \rightarrow (\overline{a} \vee \overline{b})$

53 $\overline{(a \wedge b)} \leftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b})$

54 $(a \dot{\vee} b) \leftrightarrow (a \wedge b)$

55 $\overline{a \leftrightarrow b} \vee \overline{b}$

Dati gli enunciati a, b, c, costruisci la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche.

56 $(a \vee \overline{b}) \rightarrow (c \wedge b)$

57 $(a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow \overline{b})$

58 $\overline{(a \wedge b)} \vee (b \rightarrow c) \wedge \overline{a}$

59 $(\overline{a} \wedge b) \rightarrow (a \vee \overline{c})$

60 $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\overline{a} \leftrightarrow c)$

61 $b \rightarrow [(a \leftrightarrow b) \wedge c]$

62 $a \rightarrow (b \wedge c) \vee (\overline{b} \vee a)$

63 $\left[a \vee \overline{(b \wedge c)}\right] \rightarrow \overline{a}$

Determina il valore di verità dei seguenti enunciati supponendo noto il valore di verità di alcuni di essi, come indicato in ogni esercizio.

64 $(a \vee \overline{b}) \rightarrow \overline{(c \wedge b)}$ sapendo che a è V c è F [V]

65 $(\overline{b \to c} \vee \overline{a \to d}) \wedge a$ sapendo che b è F d è F [quello di a]

66 $[\overline{a} \wedge (b \vee c)] \to (b \wedge d)$ sapendo che b è V c è V [F se a è F e d è F]

67 $(a \vee b \vee \overline{c}) \wedge (b \to a)$ sapendo che a è F b è V [F]

Date le proposizioni a: «nevica», b: «piove» e c: «esco», scrivi per esteso le seguenti espressioni logiche, costruisci le rispettive tavole di verità e stabilisci in quali casi esse sono vere.

68 $(a \vee b) \to c$

69 $(a \vee b) \wedge c$

70 $a \to (\overline{b} \wedge \overline{c})$

71 $(a \vee c) \to \overline{b}$

Dati gli enunciati a, b, c costruisci la tavola di verità delle seguenti espressioni logiche e stabilisci quali fra essi sono delle tautologie e quali delle contraddizioni.

72 **a.** $(a \wedge a) \to a$ **b.** $(a \wedge b) \leftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b})$ [T; C]

73 **a.** $(a \leftrightarrow \overline{b}) \leftrightarrow (b \to \overline{a})$ **b.** $(a \to b) \vee (b \to a)$ [né T, né C; T]

74 **a.** $[(a \leftrightarrow \overline{b}) \wedge (b \to a)] \wedge b$ **b.** $(\overline{a} \vee b) \to (a \wedge b)$ [C; né T, né C]

75 **a.** $[(a \to b) \wedge a] \to b$ **b.** $(a \wedge b) \wedge \overline{(a \wedge b)}$ [T; C]

76 **a.** $[(a \to b) \wedge \overline{b}] \to \overline{a}$ **b.** $[(a \vee \overline{b}) \wedge a] \leftrightarrow \overline{[(\overline{a} \wedge b) \vee \overline{a}]}$ [T; T]

Verifica che gli enunciati degli esercizi che seguono sono logicamente equivalenti costruendo la loro tavola di verità.

77 $(a \to b) \wedge a$; $(\overline{a} \vee b) \wedge a$

78 $a \vee (\overline{a} \wedge b)$; $a \vee b$

79 $a \wedge \overline{b}$; $\overline{(\overline{a} \vee b)}$

80 $a \vee \overline{b}$; $\overline{(\overline{a} \wedge b)}$

Applicando le proprietà delle operazioni logiche, in particolare le leggi di De Morgan, verifica l'equivalenza delle seguenti coppie di espressioni.

81 **ESERCIZIO GUIDA**

$(a \wedge \overline{b}) \wedge c$ $\overline{(\overline{a} \vee b) \vee \overline{c}}$

Consideriamo la seconda espressione logica e applichiamo le leggi di De Morgan:

$\overline{(\overline{a} \vee b) \vee \overline{c}} = \overline{(\overline{a} \vee b)} \wedge c$

Riapplichiamo la stessa legge alla prima negazione:

$\overline{(\overline{a} \vee b)} \wedge c = (a \wedge \overline{b}) \wedge c$

Poiché abbiamo ottenuto la prima espressione, possiamo concludere che le proposizioni date sono logicamente equivalenti.

82 $\overline{(a \vee b) \vee (a \wedge \overline{b})}$; $(\overline{a} \wedge \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee b)$

83 $\overline{(a \vee \overline{b}) \wedge (a \to b)}$; $(\overline{a} \wedge b) \vee \overline{(a \to b)}$

84 $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{c})$; $\overline{(\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge c)}$

Costruisci le contronominali delle seguenti proposizioni.

85 **ESERCIZIO GUIDA**

Se conoscessi la musica potrei scrivere delle canzoni.

Ricordiamo che, data l'implicazione $a \rightarrow b$ la sua contronominale è $\overline{b} \rightarrow \overline{a}$.

Le due proposizioni a e b sono rispettivamente:

a: «conosco la musica» b: «posso scrivere canzoni»

quindi la contronominale è: se non posso scrivere canzoni, allora non conosco la musica.

86 Se Maria le scrivesse una lettera, Marta sarebbe felice.

87 Se i numeri fossero tutti positivi, le temperature non scenderebbero sotto lo zero.

88 Se l'aereo ritarda perderemo la coincidenza.

89 Se il regalo non ti piace allora lo cambiamo.

90 Se Luigi non andasse a scuola non potrebbe prendere il diploma.

91 Se sapessi sciare comprerei gli sci.

92 Se avessi una sorella o un fratello, non sarei figlio unico.

LA LOGICA DEI PREDICATI

la teoria è a pag. 13

RICORDA

- Un **enunciato aperto** è costituito da un predicato che ha come argomenti una o più variabili. Il suo insieme di verità è l'insieme dei valori che lo fanno diventare una proposizione vera.
- Tenendo presenti le regole di composizione dei predicati con i connettivi, si possono determinare facilmente gli insiemi di verità di enunciati aperti composti:
  - $\overline{p(x)}$ ha come insieme di verità $\overline{P}$, complementare dell'insieme P
  - $p(x) \wedge q(x)$ ha come insieme di verità $P \cap Q$
  - $p(x) \vee q(x)$ ha come insieme di verità $P \cup Q$.

Comprensione della teoria

93 Individua fra le seguenti le proposizioni aperte:

a. «a, e, i, o, u sono vocali». **b.** «$2x + y = 6$».
c. «x è un numero intero». **d.** «$3 > x$».
e. «y è un'auto di marca straniera». **f.** «x è primo con y».
g. «$7 + 3 = 10$». **h.** «36 è multiplo di 3».
i. «$x + 1 = 5$». **l.** «x è il complementare dell'angolo y».

94 Di un enunciato aperto $p(x)$ si sa che ha come dominio A e come insieme di verità B. L'insieme di verità di $\overline{p(x)}$ è: **a.** $\mathscr{C}_A B$ **b.** $B - A$ **c.** A

95 Due enunciati aperti $p(x)$ e $q(x)$ hanno come insiemi di verità A e B. L'insieme di verità di:
a. $p(x) \vee q(x)$ è: ① $A \cap B$ ② $A \cup B$ ③ $A - B$

b. $p(x) \wedge q(x)$ è: ① $A \cap B$ ② $A \cup B$ ③ $B - A$

c. $\overline{p(x) \vee q(x)}$ è: ① $\overline{A \cap B}$ ② $\overline{A \cup B}$ ③ $\overline{A} \cup \overline{B}$

Applicazione

96 Completa la tabella come è indicato nell'esempio.

	Predicato	Argomenti	N. Variabili	Dominio
x è minore di 10	essere minore	x, 10	1	N (o Z, Q)
a è maggiore di b				
Maria è alta come y				
x è amico di y				
La frazione $\frac{a}{b}$ è equivalente alla frazione $\frac{3}{4}$				
m è la media tra a e b				
x è fratello di y				
$a + b + c = 8$				
$x \cdot y = 10$				
x è multiplo di 5				
x è un divisore di y				

Nelle proposizioni aperte degli esercizi che seguono, calcola il valore di verità di quanto richiesto.

97 $p(x)$: «x è divisore di 20», calcola $p(3)$, $p(7)$, $p(10)$, $p(5)$, $p(20)$.

98 $p(x)$: «$2 < x < 5$», calcola $p(1)$, $p\left(\frac{3}{2}\right)$, $p\left(\frac{8}{3}\right)$, $p\left(\frac{11}{2}\right)$.

99 $p(x)$: «x è minore di 10», calcola $p(6)$, $p(10)$, $p(43)$.

100 $p(x, y)$: «$x - y = 3$», calcola $p(1, 1)$, $p(5, 2)$, $p(2, 5)$, $p(-7, -10)$.

101 $p(x, y)$: «$x + y^2 = 10$», calcola $p(3, -2)$, $p(6, 2)$, $p(9, 1)$, $p(3, 3)$, $p(-15, 5)$, $p(1, -3)$.

102 $p(a, b, c)$: «$a + b \cdot c > 10$», calcola $p(0, 2, 3)$, $p(1, 5, 2)$, $p(3, 3, 3)$, $p(8, 0, 65)$.

103 $p(x, y, z)$: «$x + y = 2z$», calcola $p(1, 2, 3)$, $p(7, -3, 2)$, $p(1, 5, 3)$, $p(2, -4, 1)$, $p(8, -5, 3)$, $p(-2, -8, -5)$.

104 $p(x, y, z)$: «$2x - y \geq z$», calcola $p(3, -1, 2)$, $p(0, -1, -1)$, $p\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $p(1, -1, 1)$, $p(6, 0, 8)$.

Determina, rappresentandolo nel modo che ritieni più opportuno, l'insieme di verità delle seguenti proposizioni aperte considerando come dominio l'insieme D segnato a fianco.

105 $p(a)$: «Fissata una retta r in un piano α, a è parallela a r», in $D = \{$rette di un piano $\alpha\}$.

106 $p(x)$: «x è un numero primo», in $D = \{x \in N \mid x \leq 100\}$.

107 $p(x)$: «x è un multiplo di 3», in $D = \{x \in N \mid 10 \leq x \leq 20\}$. $[P = \{12, 15, 18\}]$

108 $p(x, y)$: «x è minore di y», in $D = \{(x, y) \in N \times N \mid x \leq 3 \wedge y \leq 4\}$.

$[P = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}]$

109 **ESERCIZIO GUIDA**

$p(x, y)$: «$y = 4 - x$», in $D = \{(x, y) \in Z \times Z \mid -5 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 6\}$

Costruisci una tabella in cui calcolare il valore assunto da y in corrispondenza dei valori assunti da x che appartengono a D.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	8	7	6	5				

Dopo aver completato la tabella, osserva che la coppia $(-5, 9)$ non appartiene a D, mentre ad esempio la $(-2, 6)$ appartiene a D. L'insieme di verità di $p(x, y)$ è dunque...

$[P = \{(-2, 6), (-1, 5), (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}]$

110 $p(x, y)$: «$x \cdot y = 30$», in $D = \{(x, y) \in Z \times Z \mid -10 \leq x \leq 10 \wedge -5 \leq y \leq 15\}$

$[P = \{(-10, -3), (10, 3), (6, 5), (-6, -5), (2, 15), (5, 6), (3, 10)\}]$

111 $p(x, y)$: «$y = x + 2$», in $D = \{(x, y) \in Z \times Z \mid -5 \leq x \leq 8 \wedge 0 \leq y \leq 10\}$

$[P = \{(-2,0), (-1,1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 9), (8, 10)\}]$

112 $p(x, y)$: «$y = 2x - 3$», in $D = \{(x, y) \in N \times N \mid x \leq 6 \wedge y \leq 15\}$

$[P = \{(2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 7), (6, 9)\}]$

113 $p(x, y)$: «$y + x = 3$», in $D = \{(x, y) \in Z \times Z \mid -3 \leq x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 3\}$

(Suggerimento: riscrivi la proposizione nella forma $y = 3 - x$) $[P = \{0, 3), (1, 2)\}]$

114 $p(x, y)$: «$y - 3x = 0$», in $D = \{(x, y) \in Z \times Z \mid -5 \leq x < 3 \wedge y \geq -7\}$

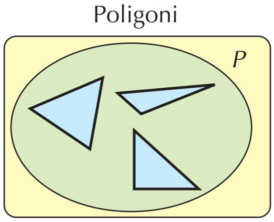
$[P = \{(-2, -6), (-1, -3), (0, 0), (1, 3), (2, 6)\}]$

115 $p(a, b)$: «$a + b < 3$», in $D = \{(a, b) \in N \times N \mid a \leq 7 \wedge b \leq 2\}$

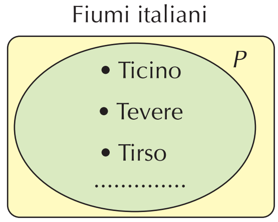
$[P = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}]$

116 Nei seguenti diagrammi sono dati il dominio e l'insieme di verità P di un enunciato aperto $p(x)$; trova un possibile $p(x)$.

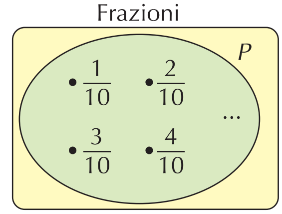
Poligoni

a. 

Fiumi italiani

b. 

Frazioni

c. 

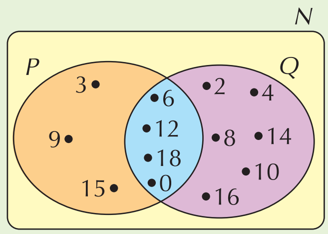
117 **ESERCIZIO GUIDA**

Date le proposizioni $p(x)$: «x è multiplo di 3» e $q(x)$: «x è pari» entrambe di dominio N determina l'insieme di verità di $p(x) \wedge q(x)$ e di $\overline{p(x) \vee q(x)}$.

Indichiamo con P l'insieme di verità di $p(x)$ e con Q quello di $q(x)$:

$P = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ $Q = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

Poiché i due insiemi hanno una intersezione non vuota, il diagramma di Eulero-Venn corrispondente è il seguente



Di conseguenza:

- l'insieme di verità di $p(x) \wedge q(x)$ è $P \cap Q = \{0, 6, 12, 18, ...\}$ cioè i multipli di 6
- l'insieme di verità di $\overline{p(x) \vee q(x)}$ è $\overline{P \cup Q} = \{\text{numeri dispari che non sono multipli di } 3\}$

118 Dati gli enunciati aperti $p(x)$: «$x = 5n$» e $q(x)$: «$x = 3n$», con $n \in N$ ed entrambi definiti nell'insieme $A = \{x \in N \mid 10 \leq x < 100\}$, determina l'insieme di verità di $p(x) \wedge q(x)$. $[\{x \in A \mid x = 15n, n \in N\}]$

119 Sia D l'insieme dei poligoni di un piano e siano $a(x)$: «x è un rettangolo», $b(x)$: «x è un rombo» aventi per dominio D. Determina l'insieme di verità di:

a. $a(x) \wedge b(x)$ **b.** $\overline{a(x) \wedge b(x)}$ **c.** $\overline{a(x)} \wedge \overline{b(x)}$

120 Dato l'insieme $D = \{x \in N \mid x < 10\}$, considera gli enunciati aperti $a(x, y)$: «$y = 3x$» e $b(x, y)$: «$y - x = 6$» definiti in $D \times D$. Dopo aver determinato gli insiemi di verità di $a(x, y)$ e $b(x, y)$, trova quelli di:

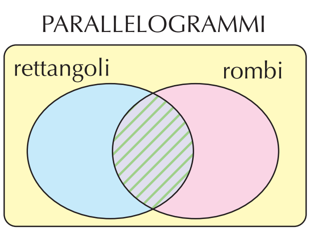
a. $a(x, y) \vee b(x, y)$ **b.** $\overline{a(x, y)} \vee b(x, y)$ **c.** $\overline{a(x, y) \vee b(x, y)}$

121 Indicati con P e Q gli insiemi di verità di due proposizioni aperte $p(x)$ e $q(x)$ determina, servendoti dei diagrammi di Eulero-Venn, gli insiemi di verità di:

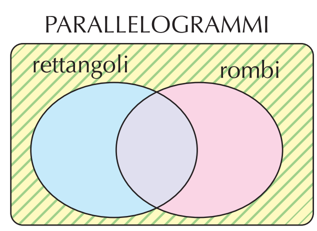
a. $p(x) \wedge \overline{q(x)}$ **b.** $\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}$ **c.** $\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}$

Nei seguenti diagrammi di Eulero-Venn, le parti evidenziate con un tratteggio rappresentano l'insieme di verità di una proposizione aperta ottenuta da operazioni su altre proposizioni atomiche $p(x)$ e $q(x)$. Individua:
- le possibili proposizioni $p(x)$ e $q(x)$
- la proposizione composta che corrisponde all'insieme evidenziato.

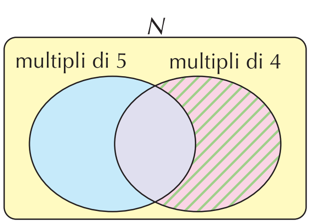
122



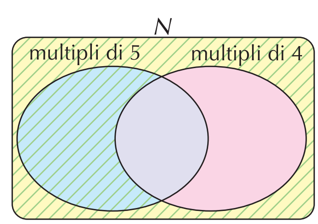
123



124



125



RICORDA

- Il simbolo $\forall$ è il **quantificatore universale**; è normalmente seguito da una proprietà e significa che tutti gli elementi di un certo insieme possiedono quella proprietà.
- Il simbolo $\exists$ è il **quantificatore esistenziale**; è normalmente seguito da una proprietà e significa che c'è almeno un elemento di un certo insieme che possiede quella proprietà.

Comprensione della teoria

126 Indicato con A l'insieme dei numeri interi maggiori di 3, la scrittura simbolica della proposizione «tutti i numeri maggiori di 3 sono positivi» è:

a. $\exists x \in A, x > 0$ **b.** $x > 3 \rightarrow x > 0$ **c.** $\forall x \in A, x > 0$ **d.** $x \in A, x > 0$

127 Quali fra i seguenti enunciati sono veri:

a. $\exists\ x \in N,\ x - 3 = 5$ **b.** $\nexists\ x \in Z,\ x < 0$

c. $\forall\ x \in Q,\ \frac{1}{2}x < x$ **d.** $\forall\ x \in$ {triangoli isosceli}, x è un triangolo rettangolo.

Applicazione

Scrivi in linguaggio comune le seguenti proposizioni che usano i quantificatori.

128 $\exists\ x \in$ {italiani}, x è nato in Piemonte.

129 $\exists\ x \in Q,\ 3^x = 1$

130 $\nexists\ x \in N,\ \sqrt{x} = 5$

131 Se A è un insieme di persone: non $\forall x \in A$, x è amico di Mario.

132 $\forall\ x \in$ {cittadini italiani che hanno più di 18 anni}, x ha diritto di voto.

133 $\nexists\ x \in Q,\ x^2 = 7.$

134 $\exists\ x \in$ {punti di una retta orientata}, x corrisponde ad un numero intero.

135 $\nexists\ x \in$ {triangoli isosceli}, x non ha due angoli congruenti.

136 $\exists\ x \in$ {parallelogrammi}, x ha le diagonali perpendicolari.

137 $\exists\ x \in$ {parallelogrammi}, x ha le diagonali congruenti.

Riscrivi in forma simbolica i seguenti enunciati usando l'appropriato quantificatore.

138 Tutti i multipli di 8 sono multipli di 2.

139 Esistono numeri dispari che sono multipli di 5.

140 C'è almeno un numero primo che è pari.

141 Non tutti i numeri primi sono dispari.

142 C'è almeno un numero naturale che sommato a 5 dà 13.

143 Non esistono gatti che abbaiano.

144 Fra i numeri naturali ce n'è qualcuno che è un quadrato perfetto.

145 Ogni numero elevato al quadrato è positivo.

146 Non tutti i numeri elevati al cubo sono positivi, ma ci sono dei numeri che elevati al cubo lo sono.

147 Fra tutti i poligoni di un piano ce n'è qualcuno che è equilatero.

148 Per ogni poligono di area assegnata, esistono altri poligoni che hanno la stessa area.

149 Ogni numero naturale ha il suo successivo.

150 Dato un punto su una retta orientata ce n'è sempre almeno uno che lo segue e almeno uno che lo precede.

151 Non esiste un numero naturale che sommato a 5 dia 2.

152 Non tutti i numeri interi sono positivi.

153 Ci sono dei numeri naturali che sono divisibili per 11.

154 Ogni numero naturale ha il suo successivo.

155 Tutti gli uomini sono maschi o femmine.

156 Ci sono numeri interi che non sono positivi.

157 Fra i numeri naturali ci sono dei quadrati perfetti.

158 Considera l'insieme N dei numeri naturali e determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a. $\forall x \in N, \exists y \in N$: «$x = 2y$». V F

b. $\exists x \in N, \forall y \in N$: «$x = 3y$». V F

c. $\forall x \in N$ e $\forall y \in N$: «$x = y$». V F

d. $\forall x \in N, \exists y \in N$: «$x < y$». V F

e. $\exists x \in N, \forall y \in N$: «$x = y^2$». V F

[F, F, F, V, V]

IL RAGIONAMENTO LOGICO E LA DEDUZIONE

la teoria è a pag. 17

RICORDA

- La correttezza di un ragionamento si può verificare in base ad alcune regole di deduzione logica:
  - **regola di particolarizzazione:** $\forall x \in A, \quad p(x)$ è V $\quad \wedge \quad t \in A \quad \Longrightarrow \quad p(t)$ è V
  - **modus ponens:** $(a \to b) \wedge a \quad \Longrightarrow \quad b$
  - **modus tollens:** $(a \to b) \wedge \overline{b} \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$
  - **schema per assurdo:** $(a \to \overline{b}) \wedge b \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$
- Un particolare schema di ragionamento è il sillogismo che ha seguente struttura:

premessa maggiore
premessa minore
―――――――――
conclusione

La correttezza logica della conclusione di un sillogismo si basa sull'applicazione corretta delle regole di deduzione e può anche essere verificata mediante relazioni di tipo insiemistico.

Comprensione della teoria

159 In base alle regole di deduzione, dalla verità dell'espressione logica $(a \to \overline{b}) \wedge a$ si può dedurre la verità di:
a. b **b.** $\overline{b}$ **c.** a **d.** $\overline{a}$

160 In base alle regole di deduzione, dalla verità dell'espressione logica $((a \vee b) \to c) \wedge \overline{c}$ si può dedurre la verità di:
a. a **b.** $\overline{a}$ **c.** $a \vee b$ **d.** $\overline{a \vee b}$

161 In base alle regole di deduzione, dalla verità dell'espressione logica $(a \to \overline{b \wedge c}) \wedge (b \wedge c)$ si può dedurre la verità di:
a. a **b.** $\overline{a}$ **c.** $b \wedge c$ **d.** $\overline{b \wedge c}$

Applicazione

Completa i seguenti schemi di ragionamento specificando quali regole di deduzione applichi.

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Se ho la febbre sto a letto; questa mattina mi sono svegliato con la febbre, quindi ....

Considerate le proposizioni: a: «ho la febbre» b: «sto a letto»

possiamo riscrivere in simboli il ragionamento: $(a \to b) \wedge a$

Si tratta di applicare la regola del modus ponens la cui deduzione logica è b.

Il ragionamento si completa quindi scrivendo: sto a letto.

163 Se canto sono felice; non sono felice quindi ....

164 Se un numero non è pari, non è multiplo di 4; il numero n non è pari, quindi ....

165 Se non ho sete non bevo; bevo quindi ....

166 Se esco con questo tempo prendo il raffreddore; adesso non ho il raffreddore quindi ....

167 Se un numero è multiplo di 6, allora è multiplo di 2; il numero n non è multiplo di 2, quindi ....

168 Se un numero positivo ha due cifre, è minore di 100; un numero positivo è maggiore di 100, quindi ....

169 Quando l'estate è molto calda, la vendemmia viene anticipata. Quest'anno la vendemmia non è stata anticipata, quindi ....

170 Spiega perché i seguenti schemi di ragionamento non sono corretti e costruisci un esempio appropriato:
$(a \to b) \wedge b \implies a$ $(a \to b) \wedge \overline{a} \implies \overline{b}$

APPROFONDIMENTI *Il sillogismo*

Dopo aver individuato le due premesse e la conseguenza, stabilisci, motivando la risposta, la validità dei seguenti sillogismi.

171 Alcuni animali sono roditori, tutti i roditori hanno i denti molto sviluppati, quindi alcuni animali hanno i denti sviluppati. [si]

172 Tutti gli uccelli hanno le ali, qualche insetto ha le ali; quindi qualche insetto è un uccello. [no]

173 Nessun uomo cammina a quattro zampe; c'è qualche animale a quattro zampe che è mammifero; allora c'è qualche animale che non è un uomo. [si]

174 Tutti i pesci nuotano; qualche uomo nuota, quindi qualche uomo è un pesce. [no]

175 Nessun uomo è immortale; tutti gli italiani sono uomini, quindi nessun italiano è immortale. [si]

176 Non si è felici se non si guadagna abbastanza denaro per vivere; tutti i ricchi guadagnano abbastanza denaro per vivere, quindi tutti i ricchi sono felici. [no]

177 Chi dorme non piglia pesci, dice il proverbio; io non dormo, quindi piglierò tanti pesci. [no]

ESERCIZI DI SINTESI E APPROFONDIMENTO

178 Considera *p*: «Fra i tuoi amici ci sono almeno due persone che hanno più di 18 anni». Considera $\overline{p}$ e supponi che essa sia vera. Quali dei seguenti casi possono essere veri?

a. Nessuno fra i tuoi amici ha più di 18 anni.
b. Fra i tuoi amici ce ne sono 4 che hanno più di 18 anni.
c. Uno solo fra i tuoi amici ha più di 18 anni.
d. Tutti i tuoi amici hanno più di 18 anni.

179 Quattro amici, Antonio, Francesco, Marco e Luca, decidono di fare una escursione in montagna formando una cordata secondo queste regole:

1. Marco deve stare subito dietro ad Antonio e non può essere l'ultimo.
2. Luca non può stare dietro a Marco.

Qual è l'ordine della cordata? [Luca, Antonio, Marco, Francesco]

180 In un gruppo di amici, alcuni giocano a tennis, altri giocano a calcio, alcuni sono abili velisti. Nella tabella che segue, in cui ogni persona è contraddistinta da una lettera maiuscola dell'alfabeto, il simbolo * in una casella sta a significare che la persona indicata nella colonna pratica quello sport.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O
Tennis	*		*	*		*	*	*		*			
Calcio		*	*	*		*	*		*		*		*
Vela	*			*	*		*	*		*	*		

Determina:

a. quante persone giocano a tennis e a calcio [4]
b. quante persone giocano a calcio e non vanno a vela [5]
c. quante persone non giocano a tennis o vanno a vela [11]
d. quante persone non giocano a tennis o giocano a calcio e vanno a vela [4]
e. quante persone non giocano a tennis e non vanno a vela e non giocano a calcio [1]
f. quante persone o giocano a tennis o giocano a calcio [7]
g. quante persone giocano a tennis o non vanno a vela. [11]

181 **ESERCIZIO GUIDA**

Anna, Beatrice, Carla e Daniela sono state invitate ad una festa e ciascuna di esse decide se partecipare o meno in base alle seguenti considerazioni:

1. Carla partecipa alla festa se non partecipa Anna.

2. Beatrice partecipa alla festa se partecipa anche Anna.

3. Anna decide di andare sicuramente.

4. Daniela partecipa se e solo se partecipano anche Beatrice e Carla.

Quali fra le ragazze andranno alla festa?

Indichiamo con l'iniziale corrispondente al nome della ragazza la proposizione che indica che essa partecipa alla festa, con la stessa lettera soprassegnata la proposizione che indica che essa non partecipa alla festa. Ad esempio:

A: Anna partecipa alla festa $\overline{A}$: Anna non partecipa alla festa.

Con questa notazione, le condizioni precedenti possono essere così formulate:

1. $\overline{A} \rightarrow C$ **2.** $A \rightarrow B$ **3.** A **4.** $D \leftrightarrow (B \wedge C)$

La **1.** è sempre vera perché $\overline{A}$ è falsa; la **2.** è vera solo se anche B è vera; rimane allora da stabilire in quali casi la **4.** è vera con B vera. Ecco la tabella:

B	C	D	$D \leftrightarrow (B \wedge C)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V

I casi in cui tutte le proposizioni sono verificate (valore di verità V) sono due e corrispondono alle seguenti possibilità:

a. alla festa partecipano tutte e quattro le amiche

b. alla festa partecipano Anna e Beatrice.

182 Tre fratelli Matteo, Luigi e Filippo decidono che ciascuno darà una somma in beneficenza se si verificano le seguenti condizioni:

1. Matteo darà in beneficenza la somma se non la darà Luigi.

2. Filippo non darà in beneficenza la somma se e solo se Matteo non lo farà.

3. Luigi darà in beneficenza la somma se la darà Matteo.

4. Matteo non darà in beneficenza la somma se la daranno Luigi e Filippo.

Quali fratelli offriranno qualcosa in beneficenza? [Luigi]

183 Quattro amici, Aldo, Francesco, Giuseppe e Marco, decidono che andranno in vacanza insieme se si verificheranno le seguenti situazioni:

1. Aldo andrà in vacanza se sarà promosso.

2. Francesco andrà in vacanza se andrà anche Aldo.

3. Giuseppe andrà in vacanza anche se non sarà promosso ma solo se andrà anche Francesco.

4. Marco non andrà in vacanza se e solo se non andrà Giuseppe.

In quali condizioni andranno in vacanza tutti insieme i nostri amici?

In quali condizioni potranno andare in vacanza anche solo tre di loro? E chi fra loro andrà in vacanza insieme?

[se A è promosso vanno tutti e quattro;
se A non è promosso 3 possibilità: F, G, M; G, M; nessuno va in vacanza]

184 Alberto, Bruno, Claudio e Dario vengono invitati ad un pic-nic in campagna ma accettano l'invito a queste condizioni:

a. Claudio non vuole partecipare se non partecipa Alberto.

b. Bruno partecipa solamente se non è il solo.

c. Alberto non partecipa se non partecipano anche Bruno e Claudio.

d. Se Claudio non partecipa, allora partecipa Alberto ma non Dario.

Il giorno della festa Claudio è presente al pic-nic. Sapresti dire quali altri ragazzi del gruppo sono sicuramente presenti? Fra le indicazioni date, ce n'è qualcuna superflua? [Alberto, Bruno; c.]

185 Marco e Andrea decidono di mettere alla prova il loro amico Umberto che si vanta di possedere una capacità logica a prova di qualsiasi tranello. Così mettono sul tavolo una moneta da 2€ e una da 1€ e dicono a Umberto:

"Ora tu chiuderai gli occhi e ognuno di noi prenderà una moneta dichiarando quale ha preso. Sapendo che almeno uno di noi due mente, devi indovinare chi possiede la moneta da 2€".

Dopo aver preso ciascuno una moneta, Marco dice: "Io ho la moneta da 2€" e Andrea dice: "Io ho la moneta da 1€".

Umberto non si fa ingannare e, dopo averci pensato un po', dichiara: "Avete mentito tutti e due, quindi Marco ha la moneta da 1€ e Andrea ha quella da 2€".
I due si guardano con aria sconfitta; anche questa volta Umberto è stato più in gamba di loro.
Aiutandoti eventualmente con un'opportuna tavola di verità, illustra il ragionamento seguito da Umberto.

186 Marta e Roberta si avviano al guardaroba di un ristorante per ritirare i loro cappelli e cappotti. Nel guardaroba ci sono, fra le altre cose, due cappelli neri ed un cappello bianco. Ad un tratto l'erogazione di corrente elettrica si interrompe ed il locale rimane immerso nel buio. Allora le due ragazze prendono ciascuna un cappello a caso ed escono dal ristorante una dietro l'altra. Alla luce del lampione Marta, che esce per seconda e vede Roberta, dice «Non so proprio che cappello ho preso!». «Allora io so di che colore è il mio» risponde Roberta. Qual è il colore del cappello di Roberta ed in base a quale ragionamento lo ha potuto determinare? [nero]

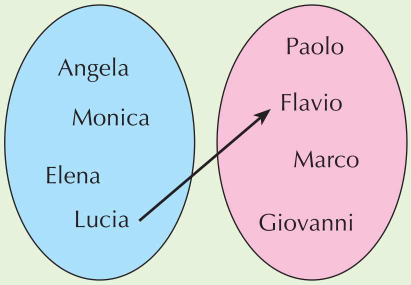
187 Tre amici si affrontano in una gara ciclistica. Sappiamo che Mario non è arrivato primo, Riccardo non è arrivato secondo, Massimo non è arrivato terzo, chi ha il nome più corto non è arrivato prima di chi ha il nome più lungo. Qual è l'ordine di arrivo? [Riccardo, Massimo, Mario]

188 Un viandante si trova ad un bivio senza indicazioni e non sa quale strada deve scegliere per andare in una località *A*. Al bivio ci sono due persone, una delle quali è sicuramente bugiarda mentre l'altra dice sempre il vero. Il viandante pone ad entrambi la stessa domanda: «Se chiedessi al tuo compare qual è la direzione per andare ad *A*, cosa mi risponderebbe?» ottenendo da entrambi la stessa risposta: «A destra». Il viandante sceglie la direzione opposta alle indicazioni avute. Sai spiegare il ragionamento che ha compiuto per prendere questa decisione?

189 **ESERCIZIO GUIDA**

In un gruppo ci sono quattro coppie di fidanzati. Le ragazze si chiamano Angela, Monica, Elena e Lucia. I ragazzi si chiamano Paolo, Flavio, Marco e Giovanni e di essi si sa che Paolo ha i baffi e non porta la cravatta, Flavio e Marco hanno i baffi e portano la cravatta, Giovanni non ha i baffi ma porta la cravatta. Delle quattro ragazze, due portano una camicia a fiori e le altre due portano una maglietta bianca. Una delle ragazze con la maglietta bianca dice: «Monica e Angela hanno la camicia a fiori», e l'altra dice: «Lucia è fidanzata con Flavio ed io sono fidanzata con uno con la cravatta». Una delle ragazze con la camicia a fiori dice: «I fidanzati di Angela ed Elena hanno i baffi». Sapresti individuare con queste informazioni quali sono le coppie del gruppo?

Per risolvere l'esercizio aiutati con la figura a fianco, collegando con un arco le coppie di fidanzati. Riassumiamo i dati:



Angela: camicia fiori	Paolo: si baffi, no cravatta
Monica: camicia fiori	Flavio: si baffi, si cravatta
Elena:	Marco: si baffi, si cravatta
Lucia:	Giovanni: no baffi, si cravatta

Allora le ragazze con la maglietta bianca sono ....

A parlare per prima fra le ragazze è ....

A parlare per seconda è ....

Allora Elena può essere fidanzata con .... oppure con .... La terza ragazza dice però che il fidanzato di Elena ha i baffi, quindi ....

Le coppie allora sono ....

[Lucia-Flavio, Elena-Marco, Monica-Giovanni, Angela-Paolo]

190 Sei amici, che indicheremo con *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, vanno in un ristorante e chiedono al cameriere di distribuire i posti a tavola secondo alcune esigenze che essi esprimono.

A: «Al mio fianco non devono esserci né Carlo né Gino che ha i baffi».
B: «Enzo ha gli occhiali».
C: «Al mio fianco non ci devono essere né Carlo né Alberto che ha la barba».
D ed *E*: «Noi non siamo né Marco né Enzo».
F: «Al mio fianco non ci devono essere né Alberto né Paolo che ha i baffi».

Il cameriere, nota subito che:
A ed *E* hanno la barba ma non i baffi e portano gli occhiali;
B e *D* non hanno né barba né baffi;
C ed *F* hanno i baffi ma non la barba.
In che modo il cameriere distribuirà i commensali a tavola?

[*A* – Enzo, *B* – Marco, *C* – Paolo, *D* – Carlo, *E* – Alberto, *F* – Gino
Distribuzione dei posti: Alberto, Enzo, Paolo, Marco, Gino, Carlo]

191 In occasione del Natale cinque amiche, Anna, Beatrice, Claudia, Daria ed Emanuela si scambiano dei regali. Ognuna di esse ne manda uno a due amiche e ne riceve uno da quelle a cui lei non ha regalato nulla. Sappiamo che Anna manda un regalo a Beatrice e a Daria e ne riceve uno da Claudia; Beatrice non riceve l'altro regalo né da Daria né da Emanuela; quest'ultima manda un regalo ad Anna e a nessuna di quelle a cui li ha mandati Anna; Daria ne riceve uno dalla stessa persona a cui l'ha mandato Anna e ne manda uno a Claudia. Da chi riceve i suoi regali Emanuela? [Beatrice e Daria]

192 Qualche amico di Silvia si è iscritto ad un torneo di ping-pong. Antonio, che non è amico di Silvia, fa parte di un gruppo che si è iscritto ad una gara di nuoto. Fra gli amici di Antonio che partecipano a questa gara, Tino gareggia anche nel torneo di ping-pong. Allora Tino è amico di Silvia. Aiutandoti con gli insiemi, stabilisci se il ragionamento è corretto. [no]

193 In Agosto oppure quando c'è un bel sole caldo, le città di mare si riempiono di turisti. Quando non c'è il sole e non è il mese di Agosto, le città di mare sono scarsamente affollate. Se oggi è una bella giornata di sole, cosa puoi dire sul valore di verità delle seguenti proposizioni?

a. «Oggi è un giorno di Agosto». V F
b. «La città è piena di turisti». V F
c. «Ci sono pochi turisti anche se è Agosto». V F

Soluzioni esercizi di comprensione

2 contraddice il primo principio	8 **a.**, **c.**	9 no	10 **c.**
11 **a.** $\wedge$, **b.** $\vee$, **c.** $\rightarrow$, **d.** $\dot{\vee}$, **e.** $\vee$	12 **b.**	13 **c.**	14 **b.**
15 **a.**	40 **c.**	41 **b.**	42 **b.**
43 **c.**	44 **b.**, **d.**	93 **b.**, **c.**, **d.**, **e.**, **f.**, **i.**, **l.**	
94 **a.**	95 **a.** ②, **b.** ①, **c.** ②	126 **c.**	
127 **a.**	159 **b.**	160 **d.**	161 **b.**

Nel volume Laboratorio e complementi trovi...

- esercizi tratti dalle gare di matematica
- i problemi di Matematica e realtà

Test finale

1 Date le proposizioni a : «Giulia è iscritta alla facoltà di legge» (V); b : «Giulia studia molto» (F), costruisci nel linguaggio comune le seguenti proposizioni e determina il loro valore di verità:

a. $a \wedge \overline{b}$ **b.** $\overline{a \vee b}$ **c.** $a \to b$ **d.** $\overline{b} \to \overline{a}$.

0,25 punti per ogni esercizio

2 Individua le proposizioni atomiche che compongono le seguenti proposizioni molecolari; dopo averle indicate con opportune lettere, scrivi tali proposizioni in forma simbolica e determina il loro valore di verità:

a. $3 + 7 = 10$ e $9 - 4 = 6$

b. 5 è positivo se e solo se 5 è maggiore di 0

c. se 3 è maggiore di -2 e 5 è maggiore di -4, allora 3 è maggiore di 5

d. se f precede b in ordine alfabetico e b precede a, allora f precede a.

0,25 punti per ogni esercizio

3 Verifica che:

a. l'espressione $[(a \wedge b) \vee (a \leftrightarrow b)] \to (a \vee \overline{b})$ è una tautologia

b. l'espressione $a \to b \wedge (a \wedge \overline{b})$ è una contraddizione.

1 punto per ogni esercizio

4 L'insieme di verità dell'enunciato aperto $p(x)$: «$x = 2n + 5$, $n \in N$» è:

a. l'insieme dei numeri pari

b. l'insieme dei numeri dispari

c. l'insieme dei numeri dispari maggiori di 3

d. l'insieme dei numeri dispari maggiori di 5.

1 punto

5 Siano $p(x)$ e $q(x)$ due enunciati aperti entrambi definiti in un insieme U, rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn gli insiemi di verità di:

a. $p(x) \vee \overline{q(x)}$; **b.** $\overline{p(x)} \wedge q(x)$

1 punto per ogni esercizio

6 Indicando con P l'insieme dei numeri primi e con A l'insieme dei numeri pari, stabilisci quale fra le seguenti scritture è equivalente alla proposizione: «Nessun numero primo che non sia 2 è pari»:

a. non $\forall x \in P - \{2\} : x \in A$

b. $\nexists x \in P - \{2\} : x \in A$

c. $\nexists x \in P : x \in A$

d. $\exists x \in P : x \in A$.

1 punto

7 Ambrogio, Luigi, Nicola e Paolo sono quattro amici che si ritrovano tutti i venerdì sera per una partita a carte. Qualche volta, fra una partita e l'altra, bevono una birra. La situazione di solito è questa:

① Ambrogio beve la sua birra se e solo se la beve anche Luigi.

② Se Luigi beve la sua birra, Nicola non la beve mai; ma se Luigi non la beve, allora Nicola beve la sua birra.

③ Paolo beve la sua birra se e solo se la beve anche Nicola.

Chi fra i quattro amici beve la birra?

2 punti

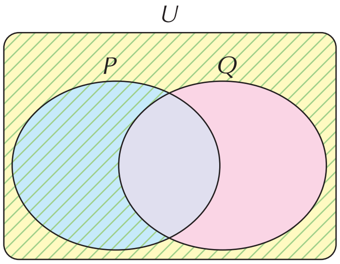
Soluzioni

1 **a.** V; **b.** F; **c.** F; **d.** F; **e.** V

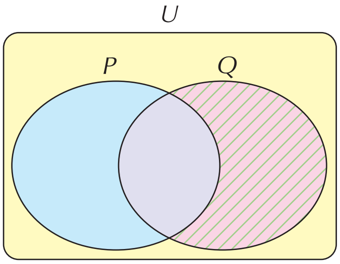
2 **a.** F; **b.** V; **c.** F; **d.** V

4 **c.**

5 **a.**



b.



6 **b.**

7 Ambrogio e Luigi oppure Paolo e Nicola

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	
Punteggio								

Valutazione
in decimi