

Problemi sulla retta

Es. 1 Detto C il punto in cui l'asse del segmento di estremi $A(-3, 3)$ e $B(1, 5)$ incontra l'asse x , calcolare le coordinate del punto D equidistante da A , B e C . Determinare quindi il rapporto \mathcal{R} tra le aree dei triangoli BCD e ABD . [$D(-1/4, 5/2)$, $\mathcal{R} = 5/6$]

Es. 2 Dati i due punti $A(-1, 1)$ e $B(2, -2)$, scrivere l'equazione del luogo dei punti C per i quali risulta 6 l'area del triangolo ABC . [$x + y \pm 4 = 0$]

Es. 3 I punti $A(2, 1)$, $B(4, 6)$, $C(-1, 4)$, $D(-3, -1)$ sono i vertici di un rombo. Verificare che i quattro lati sono uguali, che i lati opposti sono paralleli, che le diagonali sono perpendicolari e si dimezzano.

Es. 4 Dal punto $A(-1, 4)$ si conduca la retta passante per l'origine, e dal punto $B(4, 1)$ si conduca la retta parallela alla bisettrice del I e III quadrante, indicando con C il punto che le suddette rette hanno in comune. Detto D il punto posto, sul prolungamento del segmento BC , oltre C e alla distanza $8\sqrt{2}/5$ da C , si verifichi che la retta AD è parallela all'asse y e si calcoli l'area \mathcal{A} del triangolo ABD . [$\mathcal{A} = 20$]

Es. 5 Verificare che i punti $A(-1, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 1)$ sono i vertici di un triangolo rettangolo isoscele, e che l'altezza h , relativa all'ipotenusa i , è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa. [$i = 2\sqrt{13}$, $h = \sqrt{13}$]

Es. 6 Sull'asse x è dato il punto A e sull'asse y è dato il punto B , in modo tale che $OA = 3OB$. Determinare l'equazione della retta AB sapendo che passa per il punto $C(-1, 2)$. [$x - 3y + 7 = 0 \vee x + 3y - 5 = 0$]

Es. 7 Date le rette di equazioni $2x + (k - 1)y - 3 = 0$ e $3x - (k - 2)y + 1 = 0$, determinare k in modo che i triangoli che ciascuna di esse forma con gli assi cartesiani siano equivalenti. [$k = 52/25 \vee k = 56/29$]

Es. 8 La retta $r : 2x + y - 2 = 0$ interseca l'asse x in A ; la retta s , parallela ad r e passante per $P(-1, 8)$, interseca l'asse x in B . Determinare l'equazione della retta passante per l'origine e che interseca r in D e s in C , in modo che il trapezio $ABCD$ sia isoscele. [$4x - 3y = 0$]

Es. 9 Nel triangolo ABC il vertice C appartiene al semiasse positivo delle Y e gli altri due vertici sono $A(-2, 1)$ e $B(4, 3)$. Determinare le coordinate di C sapendo che la mediana relativa ad AB misura $\sqrt{17}$ e trovare le equazioni delle mediane relative agli altri due lati. [$(0, 6)$, $x + 10y - 34 = 0$, $7x + 8y + 22 = 0$]

Es. 10 Determinare sulla bisettrice del I e III quadrante un punto C sapendo che è equidistante da $A(6, 0)$ e da $B(2, 2)$; calcolare l'area del triangolo ABC . [$C(7, 7)$, area = 15]

Es. 11 Condurre per il punto di intersezione delle rette $3x + 4y - 8 = 0$ e $x + 3y - 1 = 0$ le parallele alle rette $x + y = 0$ e $y - 2x = 0$: determinare che tipo di triangolo è quello che tali parallele formano con la retta $2y - x = 0$. [isoscele]

Es. 12 I punti $A(-1, -2)$ e $B(1, 2)$ sono vertici consecutivi di un rombo; determinare la misura dell'area \mathcal{A} del rombo, sapendo che la diagonale maggiore AC sta su una retta di coefficiente angolare 1. [$\mathcal{A} = 12$]

Es. 13 Determinare sull'asse del segmento di estremi $A(-3, 3)$ e $B(1, -1)$ un punto equidistante dalle rette di equazione $4x + 3y + 1 = 0$ e $24x + 7y - 5 = 0$. $[(-13/2, -9/2) \vee (-2/3, 4/3)]$

Es. 14 Il triangolo isoscele ABC ha il vertice C sulla retta $y = 7$ e gli estremi della base nei punti $A(0, 2)$ e $B(4, 0)$. Condurre per C la perpendicolare alla retta AC che incontra in D l'asse x e calcolare il rapporto \mathcal{R} tra le aree dei triangoli ABC e BDC . $[C(5, 7), \mathcal{R} = 15/28]$

Es. 15 Determinare sull'asse y un punto P in modo che una retta passante per P e di coefficiente angolare $1/2$ formi con le rette di equazione $x - y = 0$ e $y + x - 4 = 0$ un triangolo di area 12. $[P(0, -2) \vee P(0, 4)]$

Es. 16 Nel triangolo di vertici $A(k, 0)$, $B(3k, -2)$, $C(7, 5)$ il baricentro G appartiene alla retta $x + y - 6 = 0$. Verificare che il triangolo è isoscele, e che la distanza tra baricentro e circocentro K è $AB/6$. $[k = 2, G(5, 1), K(16/3, 5/3)]$

Es. 17 La base AB del triangolo isoscele ABC sta sulla retta di equazione $x - 2y + 12 = 0$ e il vertice A sta sull'asse y . Determinare le coordinate dei vertici del triangolo sapendo che il baricentro è $G(4, 11/2)$ e calcolare perimetro e area del triangolo. $[(0, 6), (6, 9), (6, 3/2), 2\mathcal{P} = 3(5 + \sqrt{5}), \mathcal{A} = 45/2]$

Es. 18 Una retta di coefficiente angolare m passa per $P(3, 0)$ e incontra il semiasse negativo delle ordinate in C . Condotta per l'origine O la retta r parallela a PC e preso su r un punto A avente stessa ascissa di P , determinare m e la misura del perimetro del trapezio $OABC$, rettangolo in A e B , sapendo che B appartiene alla retta di equazione $x + y - 6 = 0$. $[m = 1, 2\mathcal{P} = 3(3\sqrt{2} + 1)]$

Es. 19 Scrivere l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali si ha $PA^2 - PB^2 = 25$, dove $A(1, 5)$ e $B(2, 3)$. $[x - 2y - 6 = 0]$

Es. 20 Scrivere l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali la distanza dall'asse x supera di 5 il triplo della distanza dall'asse y , e disegnare il luogo in questione. $[|y| = 5 + 3|x|]$

Es. 21 Un triangolo ha per vertici i punti $T(k - 2, 3k + 5)$, $A(4k + 5, 2)$, $S(-5 - 3k, 2k)$. Determinare k in modo che il baricentro del triangolo appartenga alla retta $2x + 3y - 1 = 0$. Per tale valore di k , determinare le equazioni della perpendicolare ad AT in T e della perpendicolare ad AS in S , e determinare inoltre le coordinate del punto di intersezione tra tali perpendicolari. $[k = 2, x + 3y + 7 = 0, 2x + y - 6 = 0]$

Es. 22 Determinare sotto quali condizioni i punti $A(k + 1, 2k)$, $B(4, 7)$, $C(2k - 2, 4k)$ sono vertici di un triangolo. Trovare quindi il luogo del baricentro al variare di k . $[k \neq 3, 6x - 3y + 1 = 0]$

Es. 23 Dal punto $P(2, 1)$ si conduca la retta r di coefficiente angolare -2 e la retta s perpendicolare a r . Determinare una parallela all'asse x che intercetti con r ed s un segmento di misura $1/2$. $[y = 4/5 \vee y = 6/5]$

Es. 24 Il punto $A(2, 1)$ è il vertice dell'angolo retto del triangolo rettangolo isoscele ABC . Determinare i vertici B e C sapendo che il lato BC appartiene alla retta $y = -2x + 8$. $[(13/5, 14/5), (19/5, 2/5)]$

Es. 25 Sia AH altezza del triangolo ABC . Sapendo che $H(5/2, 1)$, che $y_A = 2$, che $x_C = 4$, che il coefficiente angolare della retta BC è $-1/2$ e che l'area del triangolo è $15/8$, determinare le coordinate di B . $[(1, 7/4) \vee (7, -5/4)]$

Es. 26 Sia $H(1, -2)$ l'ortocentro del triangolo ABC ; sapendo che le rette cui appartengono i lati AC e CB sono rispettivamente $2x - y + 1 = 0$ e $x + y - 1 = 0$, determinare l'area del triangolo.

[30]

Es. 27 In un triangolo ABC il vertice C appartiene alla retta di equazione $2x - y + 1 = 0$; sapendo che $A(1, 1)$, $B(3, 3)$ e che l'area del triangolo è 3, determinare le coordinate di C .

$[(-4, -7) \vee (2, 5)]$

Es. 28 In un triangolo ABC i vertici A e B stanno sulla retta $x - 2y - 1 = 0$; il vertice C ha ascissa opposta al doppio di quella di A ed ha ordinata opposta a quella di B , ed il baricentro del triangolo è $G(2, -3)$. Determinare le coordinate dei vertici.

$[A(-17, -9), B(-11, -6), C(34, 6)]$

Es. 29 Nel triangolo ABC il vertice C è il centro del fascio di equazione $(k-1)x + (k-2)y + 3 = 0$, e il vertice A sta sulla retta del fascio parallela alla bisettrice del I e III quadrante. L'altezza uscente da B passa per $(-2, -1)$ ed il baricentro è $G(1/2, -7/2)$. Determinare i vertici del triangolo.

$[A(-6, 0), B(21/2, -27/2), C(-3, 3)]$

Es. 30 Nel fascio di rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante determinare le rette che intercettano con quelle di equazione $y = x$ e $y = 2x$ un triangolo di area 3.

$[y = -x \pm 6]$

Es. 31 Determinare la retta comune ai due fasci di equazione $4x + (k-1)y - 9 = 0$ e $2x(k-1) + 18y + 27 = 0$. Determinare la simmetrica di tale retta rispetto all'asse delle ascisse e la misura dell'area del triangolo formato dalle due rette trovate e dall'asse delle ordinate.

$[4x - 6y - 9 = 0, 4x + 6y - 9 = 0, 27/8]$

Es. 32 Assegnate le rette $5x - y = 0$, $x - y = 0$ e $x + y - 1 = 0$, determinare i vertici ed il baricentro G del triangolo da tali rette individuato.

$[(0, 0), (1/2, 1/2), (1/6, 5/6), G(2/9, 4/9)]$

Es. 33 Determinare i punti $A(3, k-5)$ che distano $4\sqrt{2}$ dalla retta $x - y = 0$.

$[A_1(3, -5) \vee A_2(3, 11)]$

Es. 34 Dati i punti $A(-2, 1)$ e $C(2, 3)$ determinare il punto D sulla retta $r : 3x - y + 12 = 0$ equidistante da A e da C e il punto B della retta $s : 4x + y - 6 = 0$ equidistante da A e C . Verificare che $ABCD$ è un rombo, di cui si chiede l'area.

$[D(-2, 6), B(2, -2), \mathcal{A} = 20]$

Es. 35 Verificato che il triangolo di vertici $A(6, 1)$, $B(2, 3)$, $C(7, 8)$ è isoscele sulla base AB , determinare:

a) il perimetro e il baricentro;

$[2\mathcal{P} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}, (5, 4)]$

b) il circocentro K e il raggio r della circonferenza circoscritta al triangolo;

$[K(16/3, 14/3), r = 5\sqrt{5}/3]$

c) le equazioni dei lati;

$[x - y + 1 = 0, 7x - y - 41 = 0, x + 2y - 4 = 0]$

d) il punto P dell'asse x equidistante da A e B .

$[P(3, 0)]$

Es. 36 Dopo avere determinato le coordinate del punto C equidistante da $A(8, 1)$ e da $B(6, 4)$ e appartenente alla retta $3x - 2y - 6 = 0$, determinare l'area del triangolo ABC .

$[C(1, -3/2), \mathcal{A} = 13]$

Es. 37 Determinare i vertici dei triangoli isosceli di area 5 e di base AB , dove $A(2, 2)$ e $B(6, 4)$.
 $[(5, 1) \vee (3, 5)]$

Es. 38 Dopo avere dimostrato che il quadrilatero di vertici $A(1, -2)$, $B(5, 2)$, $C(8, -1)$, $D(6, -7)$ è un trapezio rettangolo, determinarne il perimetro e l'area. Considerato il triangolo formato dalla base minore e dai prolungamenti del lato obliquo e del lato perpendicolare alle basi, trovare le equazioni degli assi e verificare che il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa di tale triangolo.

$$[2\mathcal{P} = 12\sqrt{2} + 2\sqrt{10}, \mathcal{A} = 32, x - y - 6 = 0, x + y - 13 = 0, x + 3y - 20 = 0, (19/2, 7/2)]$$

Es. 39 Dimostrare che il quadrilatero di vertici $A(1, -1)$, $B(4, 1)$, $C(9/4, 2)$, $D(3/4, 1)$ è un trapezio isoscele. Detto E il punto di intersezione delle rette AD e BC , verificare che E appartiene all'asse del segmento AB e determinare le aree del triangolo EDC e del trapezio $ABCD$.

$$[E(1/2, 3), \mathcal{A}(EDC) = 13/8, \mathcal{A}(ABCD) = 39/8]$$

Es. 40 Date le rette

$$AB : x - y + 4 = 0 \quad BC : x + y = 0 \quad AC : x + 4y + 4 = 0$$

verificare che il triangolo ABC è rettangolo in B e determinare:

a) l'area e il circocentro; $[\mathcal{A} = 20/3]$

b) i punti che distano 2 dall'asse x e $2\sqrt{2}$ dal punto A . $[(-2, 2), (-6, 2), (-2, -2), (-6, -2)]$

Es. 41 Verificato che i punti $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -2)$ non sono allineati e quindi individuano il triangolo ABC , di tale triangolo determinare:

a) il perimetro e l'area; $[2\mathcal{P} = \sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17}, \mathcal{A} = 11/2]$

b) il circocentro K ; $[K(-1/22, 3/22)]$

c) le equazioni dei lati; $[x - 3y + 5 = 0, 4x - y - 2 = 0, 3x + 2y + 4 = 0]$

d) le equazioni delle parallele ai lati condotte dai vertici opposti. $[3x + 2y - 7 = 0, x - 3y - 6 = 0, 4x - y + 9 = 0]$

Es. 42 Dati i punti $A(1, 0)$ e $B(0, 2)$, sia C il punto in cui l'asse del segmento AB incontra l'asse x ; relativamente al triangolo ABC determinare:

a) il perimetro e l'area; $[2\mathcal{P} = 5 + \sqrt{5}, \mathcal{A} = 5/2]$

b) il circocentro K , il baricentro G e l'ortocentro H ; $[K(-1/4, 5/8), G(-1/6, 2/3), H(0, 3/4)]$

c) verificare che C, H, K, G sono allineati.

Es. 43 Dati i punti $A(1, -2)$ e $B(3, 4)$, determinare:

a) l'equazione dell'asse del segmento AB ; $[x + 3y - 5 = 0]$

b) l'equazione della retta r parallela ad AB e passante per $C(-1, 0)$; $[3x - y + 3 = 0]$

- c) la distanza d tra la retta r ed AB ; $[d = 4\sqrt{10}/5]$
 d) i punti C e D dell'asse x dai quali si veda il segmento AB sotto un angolo retto; $[C(-1, 0), D(5, 0)]$
 e) l'area del quadrilatero $ADBC$. $[18]$

Es. 44 Sapendo che i punti $A(3, -1)$, $B(1, 1)$, $C(7, -2)$ sono i tre vertici consecutivi del parallelogrammo $ABCD$, determinare:

- a) le coordinate di D ; $[D(9, -4)]$
 b) il perimetro e l'area del parallelogrammo; $[2P = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{5}, A = 6]$
 c) le coordinate di E , simmetrico di C rispetto ad AB . $[E(4, -5)]$

Es. 45 Detti $O(0, 0)$, $A(2, 4)$ e $B(10, 0)$ i tre vertici consecutivi del parallelogrammo $OCBA$, si determinino le coordinate di C e si verifichi che $OACB$ è un rettangolo. Determinare il quarto vertice E del parallelogrammo di diagonale AO e vertici E, O, C, A , verificando che tale parallelogrammo è equivalente al rettangolo $OCBA$. $[C(8, -4), E(-6, 8)]$

Es. 46 Dati i punti $A(4, 1/3)$, $B(5, -1)$, $C(-4, 8/3)$:

- a) determinare l'equazione della retta r passante per A e B e le equazioni delle rette s , parallela a r , e p , perpendicolare a r , entrambe passanti per C ;

$$[r : 4x + 3y - 17 = 0, 4x + 3y + 8 = 0, 9x - 12y + 68 = 0]$$

- b) determinare le distanze d e d' di r e di s dall'origine, e la distanza d'' tra r ed s ;
 $[d = 17/5, d' = 8/5, d'' = 5]$

- c) detto D il punto di intersezione tra r e p , E ed F i punti in cui s incontra rispettivamente gli assi x ed y , ed M il punto medio del segmento AD , verificare che i quadrilateri $DEFM$ e $EFAM$ sono parallelogrammi equivalenti, e calcolarne l'area;

$$[D(0, 17/3), M(2, 3), E(-2, 0), F(0, -8/3), A = 50/3]$$

- d) determinare le rette del fascio di centro B aventi dall'origine distanza pari a 2.

$$[y + 1 = (-5 \pm 2\sqrt{22})(x - 5)/21]$$

Es. 47 I punti $A(4, 4)$, $B(-2, 2)$, $C(2, -4)$ sono i vertici di un triangolo di cui si chiede l'ortocentro H . Determinare inoltre i punti della retta AB aventi distanza pari a 8 dalla retta $y = x$.

$$[H(2/11, 16/11), (4 \pm 12\sqrt{2}, 4 \pm 4\sqrt{2})]$$

Es. 48 Tra tutti i triangoli ABC di base AB con $A(2, 0)$ $B(0, 2)$ e area 16, considerare quelli per i quali il terzo vertice C appartiene alla retta $y = 2x$. Determinare C .

$$[C_1(6, 12), C_2(-14/3, -28/3)]$$

Es. 49 Dati i punti $A(-4, 2)$ e $B(2, -6)$, determinare il punto C della retta di equazione $2x - y - 5 = 0$ equidistante da A e B . Dopo avere verificato che il triangolo ABC è rettangolo isoscele,

determinare il quarto vertice D del quadrato $ACBD$. Trovare inoltre le rette parallele alla retta AB aventi distanza 1 da essa. $[C(3, 1), D(-5, -5), 4x + 3y + 15 = 0, 4x + 3y + 5 = 0]$

Es. 50 Dopo avere determinato l'equazione della retta r passante per $A(-2, -1/2)$ e $B(0, 1/2)$, determinare:

a) l'equazione della retta n passante per $C(0, 3)$ e perpendicolare a r ; $[y + 2x - 3 = 0]$

b) il punto D di intersezione tra r ed n ; $[D(1, 1)]$

c) l'area del triangolo ADC ; $[15/4]$

d) il quarto vertice E del rettangolo $ADCE$. $[E(-3, 3/2)]$

Es. 51 Dati i punti $A(-2, -2)$ e $B(0, 2)$, determinare sulla retta $y + x = 0$ i punti C tali che il triangolo ABC sia un triangolo rettangolo di ipotenusa AB . $[C_1(-2, 2), C_2(1, -1)]$

Es. 52 Dati i punti $A(-1, 4)$ e $B(3, 0)$, determinare il punto P appartenente alla retta $r : 3x - y + 3 = 0$ ed equidistante da A e B . Determinare i punti Q , sulla retta $s : x + y - 6 = 0$ tali che valga la relazione $17QA^2 - 9QB^2 = 0$ e indicare con Q_1 quello di ascissa positiva. Determinare l'area del trapezio rettangolo AQ_1BP . $[P(-1, 0), Q_1(2, 4), Q_2(-10, 16), \mathcal{A} = 14]$

Es. 53 Dopo avere verificato che il triangolo di vertici $A(-2, 1)$, $B(1, 4)$, $C(2, -3)$ è triangolo rettangolo di area 12, determinare:

a) il centro D e il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo; $[D(3/2, 1/2), r = 5\sqrt{2}/2]$

b) le equazioni dei lati; $[x - y + 3 = 0, x + y + 1 = 0, 7x + y - 11 = 0]$

c) il baricentro G e la retta s passante per G e parallela a BC ; $[G(1/3, 2/3), 7x + y - 3 = 0]$

d) il punto P di AB che divide AB in due parti tali che $PB = 3PA$. $[P(-5/4, 7/4)]$

Es. 53 Una retta r interseca i semiassi positivi determinando segmenti uguali. Determinare l'equazione di tale retta, sapendo che l'area del triangolo formato da r con gli assi è 8.

$$[x + y - 4 = 0]$$

Es. 54 I punti $A(1, 2)$ e $B(0, 3)$ sono i vertici di un triangolo equilatero il cui terzo vertice C è nel I quadrante. Determinare le rette dei lati.

$$[x + y - 3 = 0, x - (2 - \sqrt{3})y + 3 - 2\sqrt{3} = 0, x - (2 + \sqrt{3})y + 3(2 + \sqrt{3}) = 0]$$

Es. 55 I punti $A(1, 2)$ e $B(0, 3)$ sono i vertici di un triangolo equilatero il cui terzo vertice C appartiene alla retta di equazione $2x + y - 2 = 0$. Determinare le coordinate del terzo vertice C .

$$[C_1(-1, 4) \vee C_2(25/7, -36/7)]$$

Es. 56 Le rette $3x + y = 0$ e $x - 3y = 0$ sono le equazioni dei lati di un triangolo isoscele; sapendo che il punto $(5, 0)$ appartiene alla base del triangolo, determinarne area e perimetro.

$$[\mathcal{A} = 20, 2\mathcal{P} = 4(\sqrt{10} + \sqrt{5})]$$

Es. 57 I punti $A(0, -4)$, $B(3, 0)$, $C(0, 6)$ sono i vertici di un triangolo. Trovare la distanza tra il punto C e la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. $[\sqrt{10}]$

Es. 58 Determinare il valore di k in modo tale che la retta $2x + 3y + k = 0$ individui con gli assi coordinati un triangolo di area 27. [$k = \pm 18$]

Es. 59 Determinare le coordinate dei vertici dei due triangoli isosceli di base AB , con $A(1, 0)$ e $B(5, -2)$, e per area 5. [$C_1(4, 1) \vee C_2(2, -3)$]

Es. 60 Sulla retta $2x - y + 5 = 0$ determinare il punto P la cui distanza dall'asse x sia uguale ai $3/5$ della sua distanza dall'asse y . [$P_1(-25/7, -15/7) \vee P_2(-25/13, 15/13)$]

Es. 61 Dati i due punti $A(-4, 0)$ e $B(0, 6)$, determinare la retta passante per il punto medio del segmento AB e che intercetta sull'asse x un segmento doppio di quello intercettato sull'asse y . [$x + 2y - 4 = 0, x - 2y + 8 = 0$]

Es. 62 Due rette tra loro perpendicolari e uscenti dall'origine formano un triangolo isoscele con la retta $2x + y - 5 = 0$. Determinare l'area di questo triangolo. [5]