2 Altre operazioni con i vettori

Scomposizione di un vettore

SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE LUNGO DUE DIREZIONI ASSEGNATE

Scomporre un vettore $\vec{A}$ lungo due direzioni assegnate r e s significa determinare un vettore $\vec{B}$ su r e un vettore $\vec{C}$ su s tali che la loro somma sia $\vec{A}$ (figura 6):

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

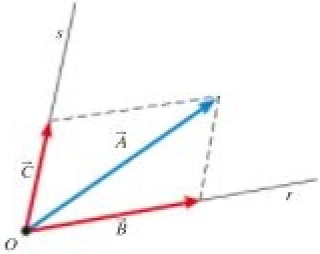


Figura 6
Scomposizione del vettore $\vec{A}$ lungo le direzioni r e s.

Proiezione di un vettore

PROIEZIONE DI UN VETTORE LUNGO UNA DIREZIONE ASSEGNATA

La **proiezione** di un vettore $\vec{A}$ lungo una direzione r è il vettore che si ottiene congiungendo la coda di $\vec{A}$ con la proiezione ortogonale della punta di $\vec{A}$ su r (figura 7).

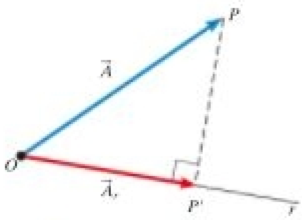


Figura 7
Per determinare la proiezione di $\vec{A}$ lungo la direzione r bisogna individuare la proiezione della punta di $\vec{A}$ su r.

Prodotto scalare di due vettori

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

Il **prodotto scalare** $\vec{A} \cdot \vec{B}$ di due vettori è lo scalare uguale al prodotto del modulo di uno dei vettori per il modulo della proiezione dell'altro vettore sul primo; il **segno** è positivo se il vettore e la proiezione dell'altro hanno lo stesso verso, negativo se hanno verso opposto (figura 8).

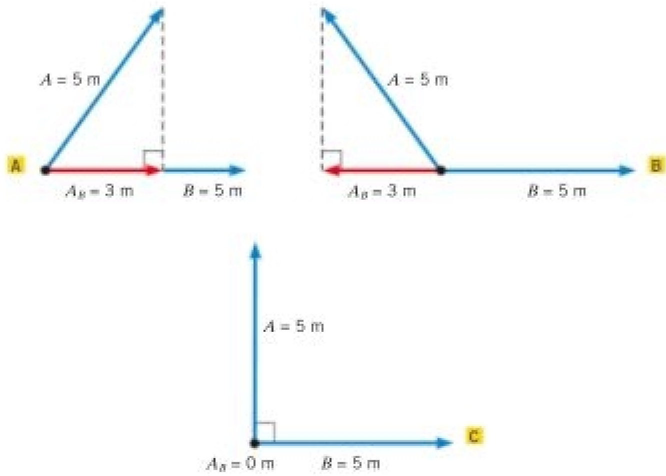


Figura 8
A Se la proiezione di $\vec{A}$ su $\vec{B}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}$, il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ è positivo.
B Se la proiezione di $\vec{A}$ su $\vec{B}$ ha verso opposto a $\vec{B}$, il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ è negativo.
C Se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari, il loro prodotto scalare è nullo.

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE DI VETTORI

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

proprietà commutativa:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

proprietà distributiva rispetto all'addizione:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$$

Prodotto vettoriale di due vettori

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI

Il **prodotto vettoriale** di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è il vettore $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ avente:

- **modulo** uguale all'area del parallelogramma formato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- **direzione** perpendicolare al piano che contiene i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, cioè verso uscente dal palmo della mano destra se il pollice è posto nel verso di $\vec{A}$ e le altre dita nel verso di $\vec{B}$ (figura 9).

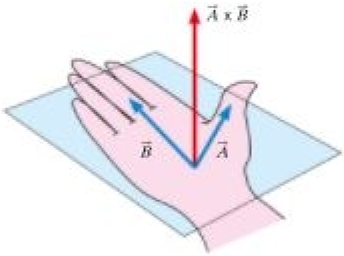


Figura 9
Il verso del prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ è dato dalla regola della mano destra.

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE DI VETTORI

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

proprietà anticommutativa:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\,\vec{B} \times \vec{A}$$

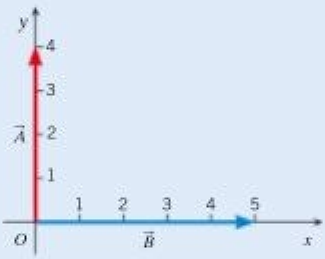
proprietà distributiva rispetto all'addizione:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

ESEMPIO 3 Prodotto scalare e vettoriale

Considera i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresentati in figura.

- Calcola $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
- Calcola $\vec{A} \cdot \vec{C}$ sapendo che $\vec{C} = -\vec{B}$.
- Determina modulo, direzione e verso di $\vec{A} \times \vec{B}$.

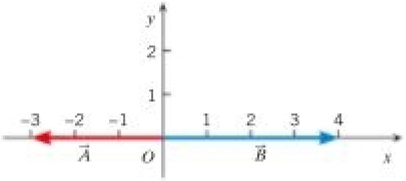


La soluzione

- Il prodotto scalare è nullo, perché, essendo i due vettori perpendicolari tra loro, la proiezione di un vettore sull'altro è nulla.
- Anche questo prodotto è nullo perché il vettore $\vec{C} = -\vec{B}$ risulta perpendicolare al vettore $\vec{A}$.
- Il modulo, essendo i due vettori perpendicolari, è uguale al prodotto del modulo dei due vettori, quindi $5 \cdot 4 = 20$, la direzione è perpendicolare al piano del foglio, il verso è entrante nel foglio.

ESERCIZI

5 Considera i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresentati in figura.



- Calcola $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
- Calcola $\vec{A} \cdot \vec{C}$ sapendo che $\vec{C} = -\vec{B}$.
- Calcola $\vec{A} \cdot \vec{C}$ sapendo che $\vec{C} = -\vec{A}$.

3 Seno, coseno e tangente di un angolo

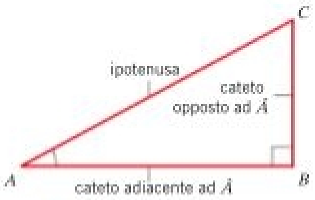


Figura 10
Il triangolo rettangolo *ABC* permette la definizione di tre funzioni notevoli dell'angolo $\hat{A}$: coseno, seno e tangente.

SENO, COSENO E TANGENTE DI UN ANGOLO

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{lunghezza del cateto } \textit{adiacente} \text{ ad } \hat{A}}{\text{lunghezza dell'ipotenusa}}$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\text{lunghezza del cateto } \textit{opposto} \text{ ad } \hat{A}}{\text{lunghezza dell'ipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\text{lunghezza del cateto } \textit{opposto} \text{ ad } \hat{A}}{\text{lunghezza del cateto } \textit{adiacente} \text{ ad } \hat{A}}$$

Figura 11
Triangolo rettangolo di riferimento per la definizione di coseno, seno e tangente.

Facendo riferimento alla figura 11:

$$\cos\theta = \frac{h_a}{h} \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h_o}{h} \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h_o}{h_a} \tag{3}$$

Il seno, il coseno e la tangente di un angolo sono numeri privi di unità di misura, perché sono definiti come rapporti tra le lunghezza di due lati di un triangolo rettangolo.

Formule trigonometriche del prodotto scalare e del prodotto vettoriale

ESPRESSIONE TRIGONOMETRICA DEL PRODOTTO SCALARE

Il **prodotto scalare** di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è il numero $AB\cos\theta$, dove θ è l'angolo formato dai due vettori.

ESPRESSIONE TRIGONOMETRICA DEL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE

Il **modulo del prodotto vettoriale** di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è il numero $AB\operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo formato dai due vettori.

ESEMPIO 4 Sulle scale mobili

Una scala mobile collega l'atrio di una stazione ferroviaria con la biglietteria.

▸ Sapendo che la scala mobile è lunga 18 m e ha un'inclinazione di 30° (figura 12), calcola l'altezza della biglietteria rispetto all'atrio.

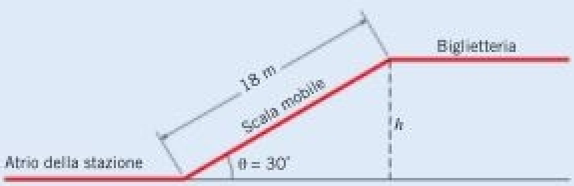


Figura 12
Schema relativo al calcolo dell'altezza della biglietteria rispetto all'atrio della stazione.

La soluzione

Dalla definizione di seno

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{18 \text{ m}}$$

si ricava

$$h = (\text{sen } 30°)(18 \text{ m}) = \frac{1}{2}(18 \text{ m}) = \boxed{9 \text{ m}}$$

ESEMPIO 5 Quanto è alto?

L'ombra proiettata da un grattacielo in un giorno soleggiato è lunga 130 m. Come mostra la figura 13, la direzione dei raggi solari forma un angolo di 60° con il terreno.

▶ Qual è l'altezza dell'edificio?

La soluzione

Per la definizione di tangente si ha:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{h_o}{h_a}$$

Sapendo che $\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$ e $h_a = 130$ m, otteniamo

$$h_o = (130 \text{ m})\sqrt{3} = \boxed{225 \text{ m}}$$

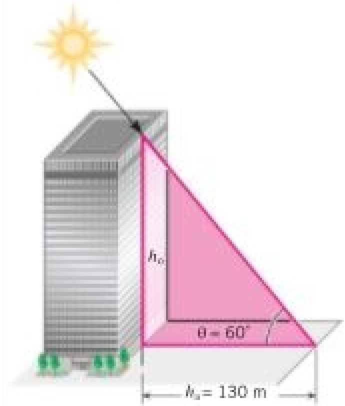


Figura 13
La trigonometria permette di trovare l'altezza h_o dell'edificio se sono note l'ampiezza dell'angolo θ e la lunghezza h_a dell'ombra dell'edificio.

ESERCIZI

6 Un cartoncino ha la forma di un parallelogramma, con i lati rispettivamente di 16 cm e 25 cm e l'angolo fra essi di 30°.

▶ Calcola l'area del cartoncino.

7 Due vettori hanno modulo 50,0 e formano un angolo di 60°. Calcola:

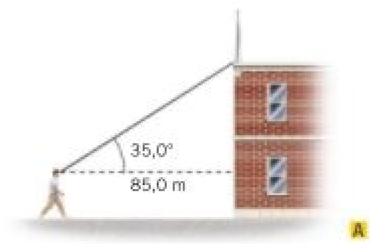
▶ il loro prodotto scalare;

▶ il modulo del loro prodotto vettoriale.

8 Una scala lunga 3,8 m è appoggiata a un muro verticale. Sapendo che il punto d'appoggio sul terreno della scala dista 1,9 m dal muro, calcola:

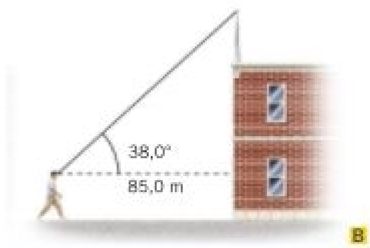
▶ l'angolo che la scala forma col terreno;

▶ l'altezza da terra del punto d'appoggio della scala sul muro.



9 Considera la situazione mostrata nella figura a fianco.

▶ Calcola l'altezza dell'antenna posta sul tetto.



4 I vettori in coordinate cartesiane e le loro operazioni

SIMULAZIONE
Displacement vector

Componenti cartesiane di un vettore

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano, formato dagli assi orientati x e y perpendicolari fra loro. Se scomponiamo un vettore $\vec{A}$ del piano lungo tali assi, otteniamo due vettori $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ tali che

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

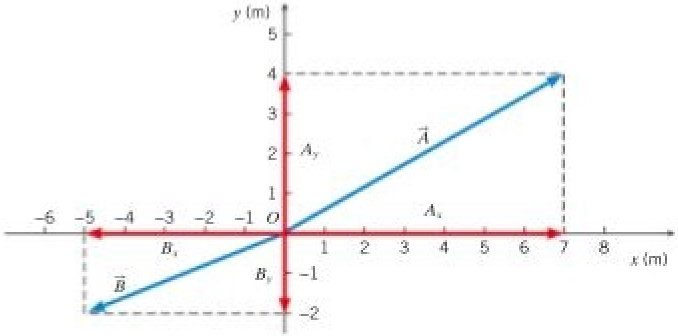


Figura 14
Il vettore $\vec{A}$ ha componenti cartesiane $A_x = 7$ m e $A_y = 4$ m, mentre il vettore $\vec{B}$ ha componenti cartesiane $B_x = -5$ m e $B_y = -2$ m.

Spesso è più facile usare le **componenti cartesiane** A_x e A_y di un vettore $\vec{A}$ invece dei vettori $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ (figura 14). La componente A_x ha valore uguale al modulo di $\vec{A}_x$ e ha segno positivo se $\vec{A}_x$ ha lo stesso verso dell'asse x e segno negativo in caso contrario. La componente A_y è definita in maniera analoga.

Il vettore $\vec{A}$ può essere indicato mediante la scrittura

$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$

che evidenzia le componenti cartesiane rispetto agli assi coordinati.

I versori degli assi

Un modo per indicare la scomposizione di un vettore lungo gli assi cartesiani è quello di usare i vettori unitari, chiamati anche **versori**. Un versore ha modulo 1 ed è privo di dimensioni. In particolare:

- $\hat{x}$ è il simbolo che indica il **versore dell'asse x**, che ha la direzione e il verso dell'asse x;
- $\hat{y}$ è il simbolo che indica il **versore dell'asse y**, che ha la direzione e il verso dell'asse y.

I versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono mostrati nella figura 15. Usando questi versori, la scomposizione di un vettore $\vec{A}$ lungo gli assi cartesiani è

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$

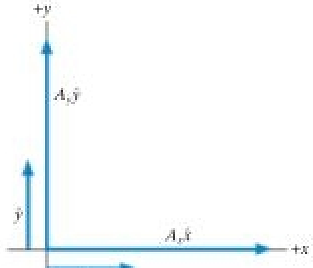


Figura 15
I vettori unitari adimensionali $\hat{x}$ e $\hat{y}$, chiamati anche versori degli assi x e y, hanno modulo uguale a 1 e direzione e verso uguali a quelli scelti come positivi per gli assi. Usando questi versori, i vettori componenti del vettore $\vec{A}$ possono essere scritti nella forma $\vec{A}_x = A_x\hat{x}$ e $\vec{A}_y = A_y\hat{y}$.

Operazioni con vettori dati in componenti cartesiane

SOMMA E DIFFERENZA DI VETTORI DATI IN COMPONENTI CARTESIANE

Se $\vec{A} = (A_x, A_y)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y)$, la **somma** $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ è il vettore di componenti $C_x = A_x + B_x$ e $C_y = A_y + B_y$, mentre la **differenza** $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ è il vettore di componenti $D_x = A_x - B_x$ e $D_y = A_y - B_y$.

MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE DATO IN COMPONENTI CARTESIANE PER UNO SCALARE

Moltiplicando un vettore $\vec{A} = (A_x, A_y)$ per un numero k, si ottiene un nuovo vettore $\vec{B} = k\vec{A}$ avente componenti $B_x = kA_x$ e $B_y = kA_y$.

PRODOTTO SCALARE DI VETTORI DATI IN COMPONENTI CARTESIANE

Il **prodotto scalare** dei vettori $\vec{A} = (A_x, A_y)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y)$ è il numero $A_xB_x + A_yB_y$.

Vettori nello spazio

Per i vettori nello spazio, espressi mediante tre componenti cartesiane x, y e z, la tabella seguente riporta le regole di calcolo e quelle per determinare il modulo del prodotto vettoriale di due vettori a partire dalle loro componenti.

Operazioni su vettori dello spazio espressi mediante componenti cartesiane

Addizione $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$	$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Sottrazione $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$	$D_x = A_x - B_x$ $D_y = A_y - B_y$ $D_z = A_z - B_z$
Prodotto per un numero $\vec{B} = k\vec{A}$	$B_x = kA_x$ $B_y = kA_y$ $B_z = kA_z$
Prodotto scalare $S = \vec{A} \cdot \vec{B}$	$S = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
Prodotto vettoriale $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B}$	$V_x = A_yB_z - A_zB_y$ $V_y = A_zB_x - A_xB_z$ $V_z = A_xB_y - A_yB_x$

ESEMPIO 6 Trovare le componenti di un vettore

Il vettore spostamento $\vec{s}$ rappresentato nella figura 16 ha modulo $s = 96$ m e forma un angolo di 60° con l'asse x.

▸ Determina le sue componenti lungo gli assi x e y.

La soluzione

Applicando l'equazione (2) si ha

$$\text{sen } 60° = \frac{s_y}{s} \quad \Rightarrow \quad s_y = s(\text{sen } 60°) = (96 \text{ m})\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{83 \text{ m}}$$

Applicando l'equazione (1) si ha

$$\cos 60° = \frac{s_x}{s} \quad \Rightarrow \quad s_x = s(\cos 60°) = (96 \text{ m})\frac{1}{2} = \boxed{48 \text{ m}}$$

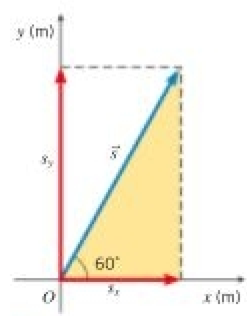


Figura 16
Determinazioni delle componenti s_x e s_y del vettore $\vec{s}$ avente modulo $s = 96$ m.

ESEMPIO 7 Determinare modulo e direzione di un vettore

Nella figura 17 è rappresentato il vettore $\vec{A} = (A_x, A_y) = (4{,}19 \text{ m}, 2{,}35 \text{ m})$.

▸ Determina il modulo e la direzione.

La soluzione

Per calcolarne il modulo scriviamo il teorema di Pitagora per il triangolo OPQ, nel quale l'ipotenusa è A e i cateti sono le componenti A_x e A_y:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(4{,}19 \text{ m})^2 + (2{,}35 \text{ m})^2} = \sqrt{23{,}1 \text{ m}^2} = \boxed{4{,}81 \text{ m}}$$

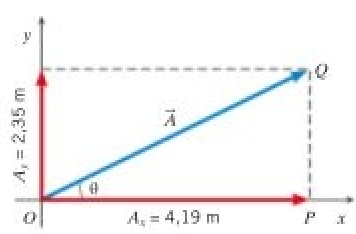


Figura 17
Note le componenti A_x e A_y si possono determinare modulo, direzione e verso di $\vec{A}$.

Per determinare l'ampiezza dell'angolo θ, osserviamo che tg θ = PQ/PO e quindi

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{2{,}35\ \text{m}}{4{,}19\ \text{m}} = 0{,}561$$

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo acuto la cui tangente è uguale a 0,561 si può usare la funzione inversa alla tangente e scrivere

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} 0{,}561$$

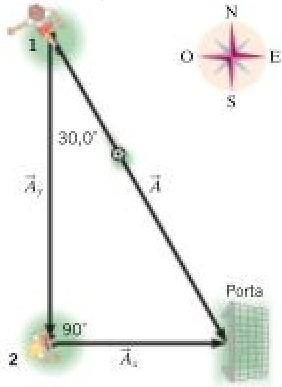
Utilizzando una calcolatrice, si ottiene

$$\theta = \boxed{29{,}2°}$$

ESERCIZI

10 Il giocatore di calcio 1 è a una distanza di 8,6 m dalla porta, come mostra la figura. Se calcia il pallone direttamente in rete, il pallone compie lo spostamento indicato con $\vec{A}$. Se invece passa il pallone al giocatore 2 che poi lo tira in rete, il pallone compie i due spostamenti successivi indicati con $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$.

▶ Quali sono i moduli di $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$?



11 Considera due vettori di componenti (12, 9) e (−12,9).

▶ Calcola i moduli dei due vettori.

12 Il vettore $\vec{A}$ ha un modulo di 145 unità e punta a 35,0° verso nord rispetto all'est. Il vettore $\vec{B}$ punta a 65,0° verso est rispetto al nord. Il vettore $\vec{C}$ punta a 15,0° verso ovest rispetto al sud. Addizionando questi tre vettori si ottiene un vettore risultante nullo.

▶ Usando le componenti dei vettori determina i moduli del vettore $\vec{B}$ e del vettore $\vec{C}$.

13 Considera due vettori di componenti (866, 500) e (500, 866).

▶ Calcola l'ampiezza dell'angolo formato dai due vettori.

▶ Calcola il loro prodotto scalare.

▶ Calcola il modulo del loro prodotto vettoriale.

14 Un giocatore di golf manda in buca una pallina con tre lanci. Nel primo la pallina rotola per 5,0 m verso est, nel secondo percorre 2,1 m in una direzione che forma un angolo di 20,0° verso nord rispetto all'est e nel terzo lancio percorre 0,50 m verso nord.

▶ Quale spostamento (in modulo, direzione e verso rispetto alla direzione Est) era necessario per mandare in buca la pallina con un lancio solo?

15 Due vettori hanno moduli di 11 e 7 unità. Il loro prodotto scalare è 43.

▶ Calcola l'ampiezza dell'angolo formato dalle direzioni dei due vettori.