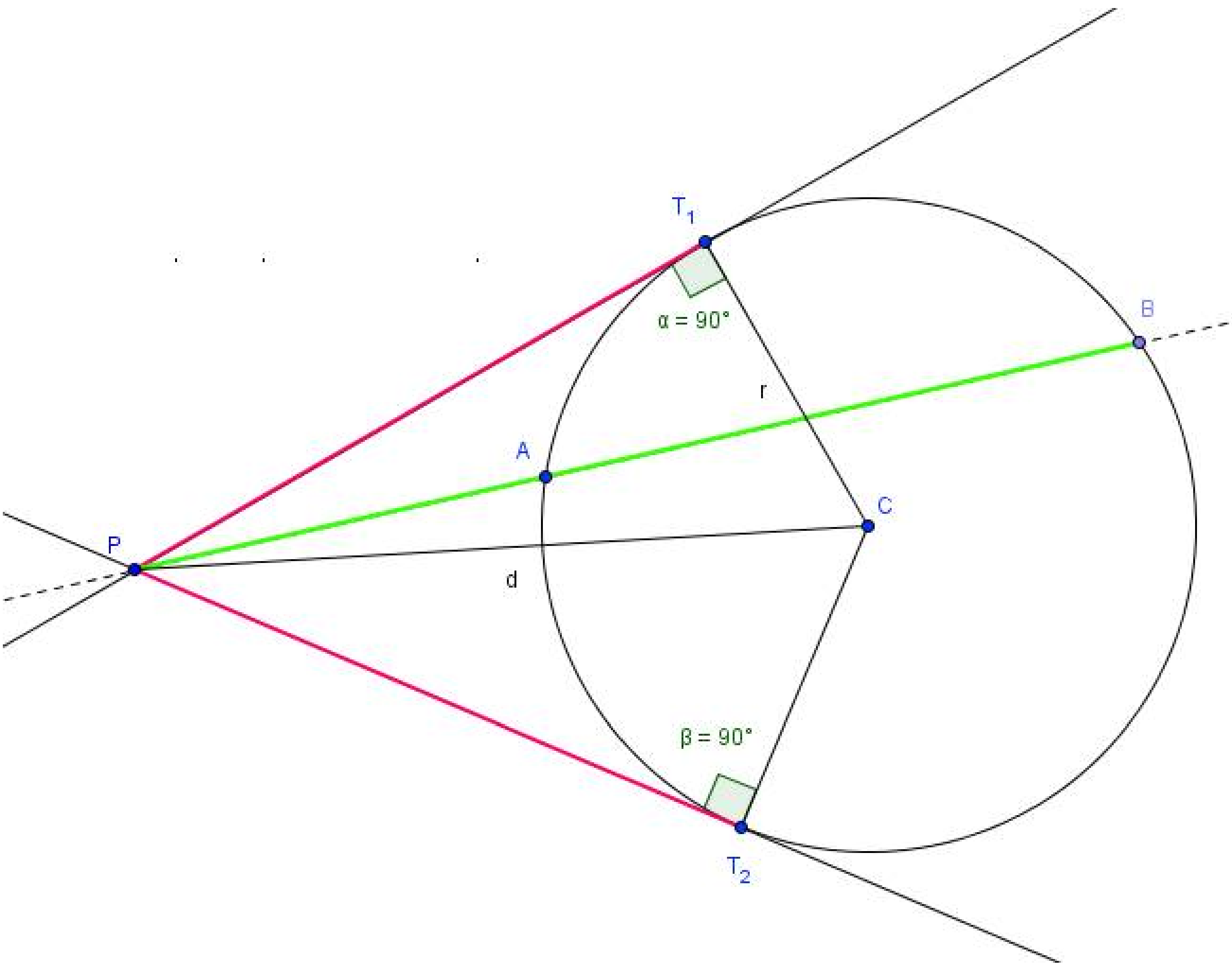
Potenza di un punto rispetto ad una circonferenza

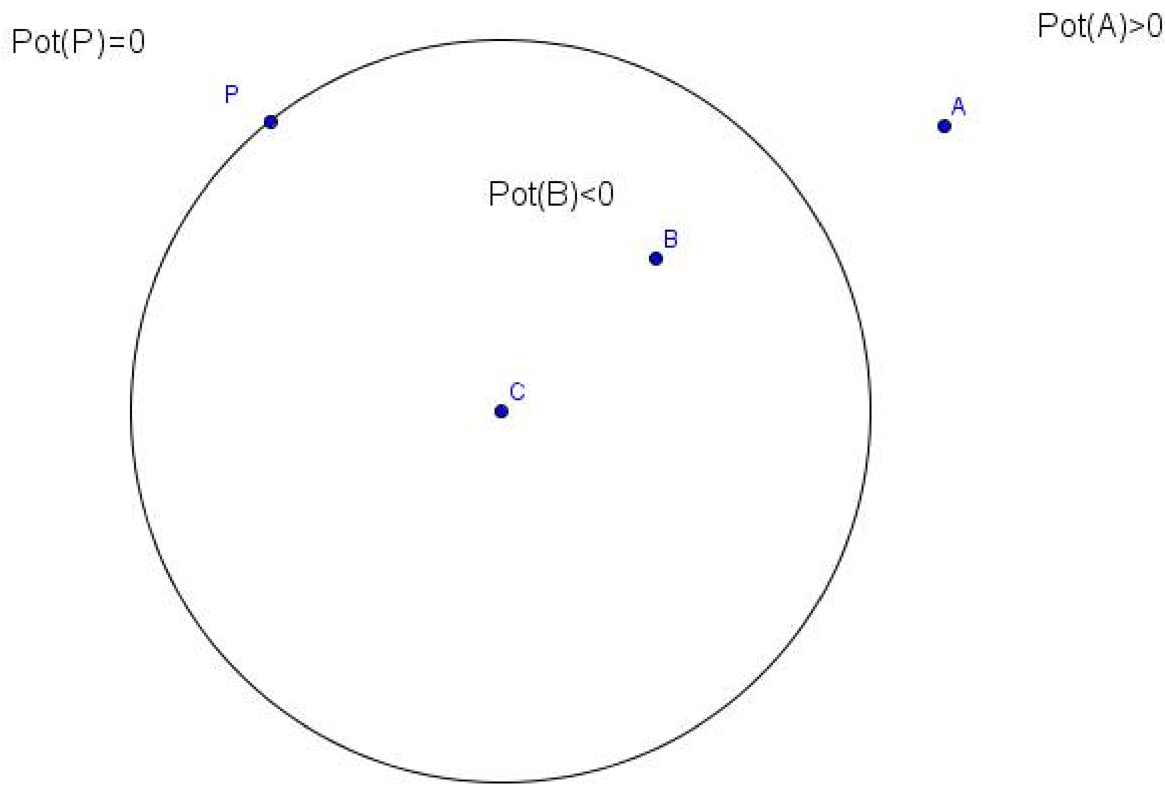
Se da un punto P esterno a una circonferenza conduciamo una qualunque secante e indichiamo con A e B i punti in cui essa taglia la circonferenza diremo potenza del punto P rispetto alla circonferenza data il prodotto costante della lunghezza dell'intera secante e della sua parte esterna: Pot P = PA • PB.



Si ricorda che, per il **teorema delle tangenti**, i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza sono congruenti; pertanto $PT_1 = PT_2$.

Per dimostrare che il prodotto $PA \cdot PB$ risulta costante (cioè non dipende dalla secante considerata) utilizziamo il **teorema della secante e della tangente**: esso afferma che, condotte da un punto P esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, il segmento di tangente è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna; si ha quindi che $Pot\,P = PA \cdot PB = PT_1^2 = PT_2^2 = d^2 - r^2$ dove con d e r si sono indicati rispettivamente la distanza di P dal centro C della circonferenza e il raggio della circonferenza.

Estendiamo la definizione di potenza di un punto rispetto ad una circonferenza anche a punti appartenenti alla circonferenza o interni ad essi defininendola come $Pot\,P = d^2 - r^2$. Da tale definizione è evidente che l**a potenza di un punto rispetto ad una circonferenza è positiva, nulla o negativa a seconda che il punto sia esterno alla circonferenza, sulla circonferenza o interno alla circonferenza.**



Se stiamo lavorando in un sistema di coordinate cartesiane in cui P ha coordinate $P=(x_0,y_0)$ e la circonferenza ha equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avremo che

$$d=\sqrt{\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{b}{2}\right)^2}$$ e $$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$ da cui

$$Pot\,P=d^2-r^2=\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y_0+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c.$$

Possiamo concludere che

la potenza di un punto rispetto a una circonferenza si ottiene sostituendo la x e la y dell'equazione della circonferenza con l'ascissa e l'ordinata del punto dato.

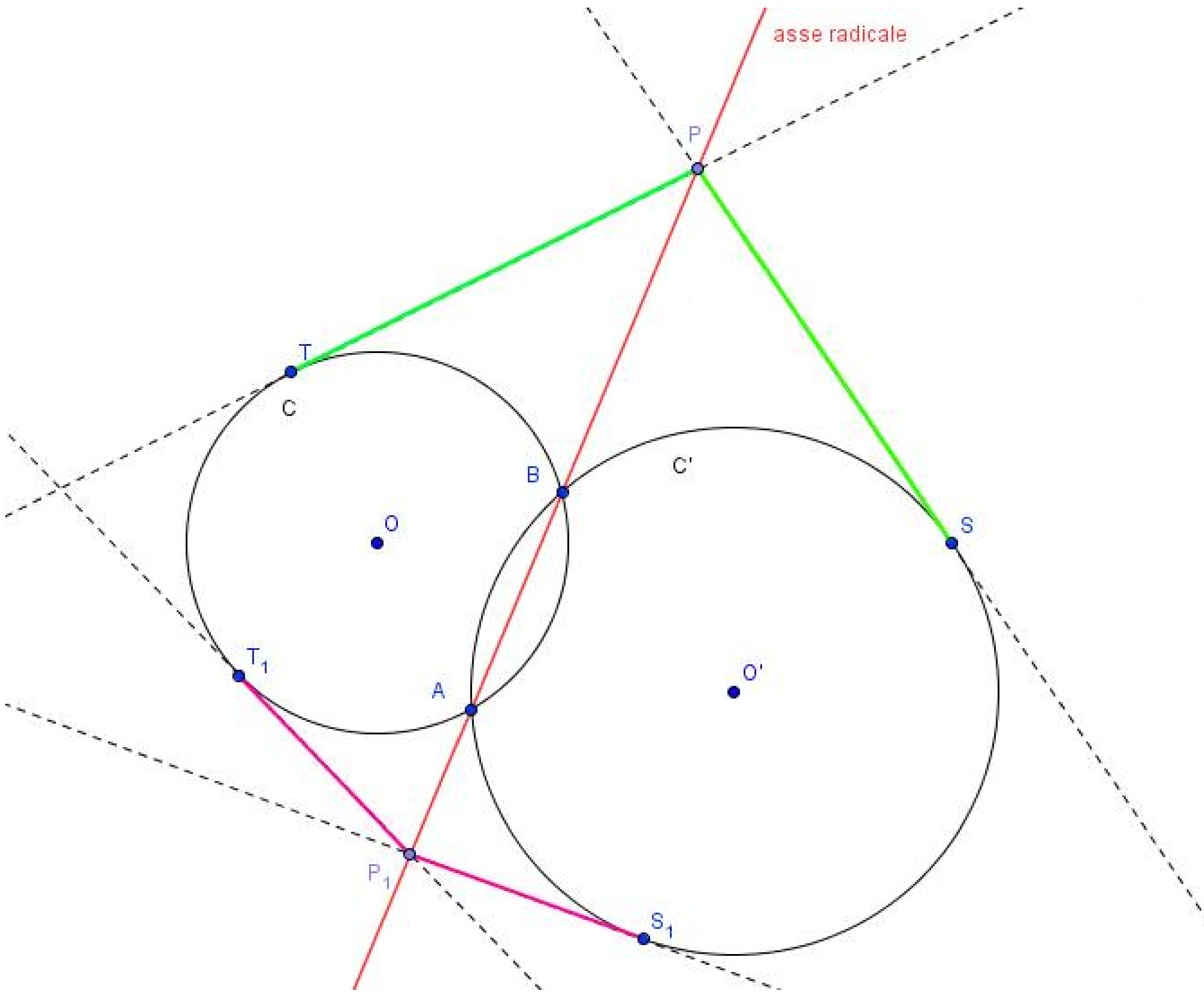
Considerate due circonferenze distinte non concentriche $C: x^2+y^2+ax+by+c=0$ e $C': x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$, se $P_0=(x_0,y_0)$ è un punto del piano avente la stessa potenza rispetto alle due circonferenze, per quanto appena visto, risulterà che

$$x_0{}^2+y_0{}^2+ax_0+by_0+c=x_0{}^2+y_0{}^2+a'x_0+b'y_0+c'$$

cioè $(a-a')x_0+(b-b')y_0+(c-c')=0$; poichè $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$ è l'equazione dell'asse radicale delle due circonferenze, possiamo concludere che il punto P_0 appartiene all'asse radicale delle due circonferenze.

Viceversa, se un punto soddisfa l'equazione dell'asse radicale di due circonferenze, allora il punto avrà la stessa potenza rispetto alle due circonferenze.

Possiamo concludere che l'**asse radicale di due circonferenze è il luogo geometrico dei punti del piano di uguale potenza rispetto alle due circonferenze**.



Come conseguenza della definizione di potenza di un punto rispetto a una circonferenza si ha che, date due circonferenze, ogni punto dell'asse radicale ad esse esterno gode della proprietà caratteristica che i segmenti di tangente alle circonferenze da esso condotti sono congruenti.