VETTORI

1. I VETTORI DEL PIANO

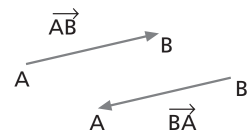
Le grandezze scalari e le grandezze vettoriali

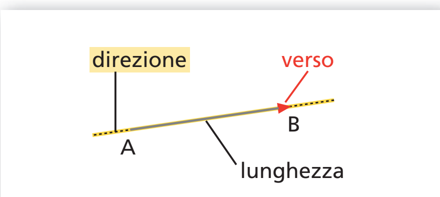
Esistono grandezze determinate dal numero che le misura rispetto a una prefissata unità, come per esempio la lunghezza, l'area, il volume, il tempo.
Queste grandezze sono dette **grandezze scalari**.

Altre grandezze, come per esempio lo spostamento e la velocità, sono rappresentate da un *numero*, una *direzione* e un *verso*.
Tali grandezze vengono chiamate **grandezze vettoriali** e vengono descritte mediante **vettori**.

Segmenti orientati e vettori

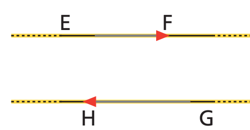
Un segmento AB può essere percorso in due modi: da A verso B oppure da B verso A. Nel primo caso, lo indichiamo con $\overrightarrow{AB}$ e diciamo che A è il primo estremo e B il secondo estremo; nell'altro caso, indichiamo il segmento con $\overrightarrow{BA}$ e diciamo che B è il primo estremo e A il secondo estremo.
In generale, un **segmento orientato** $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato dalla **lunghezza** del segmento AB, dalla **direzione** della retta AB e da un **verso**, ossia dal senso di percorrenza dal primo estremo A al secondo estremo B.





◀ **Figura 1** **Il verso di un segmento può essere indicato mediante la punta di una freccia.**

Due segmenti orientati $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$ hanno **verso opposto**, o **contrario**, se hanno la stessa direzione ma non lo stesso verso.



DEFINIZIONE

Segmenti equipollenti

Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono equipollenti, e scriviamo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, se hanno:

- la stessa lunghezza, cioè sono congruenti;
- la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele;
- lo stesso verso.

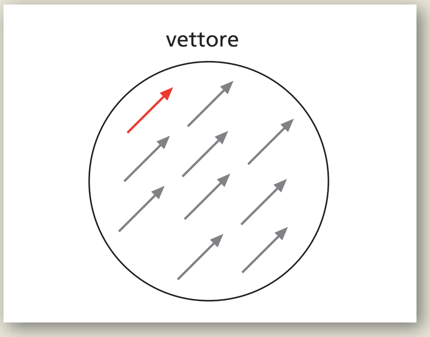
Indichiamo con S l'insieme dei segmenti orientati del piano. Nell'insieme S l'equipollenza è una relazione di equivalenza perché gode delle proprietà *riflessiva* (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso), *simmetrica* (se $\overrightarrow{MN}$ è equipollente a $\overrightarrow{PQ}$, allora $\overrightarrow{PQ}$ è equipollente a $\overrightarrow{MN}$) e *transitiva* (se $\overrightarrow{MN}$ è equipollente a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PQ}$ è equipollente a $\overrightarrow{RS}$, allora $\overrightarrow{MN}$ è equipollente a $\overrightarrow{RS}$). Quindi, la relazione di equipollenza induce in S una partizione in classi di equivalenza.

● Data una relazione di equivalenza su un insieme S, preso un elemento $x \in S$, la *classe di equivalenza* di x è l'insieme di tutti gli elementi di S che sono in relazione con x.

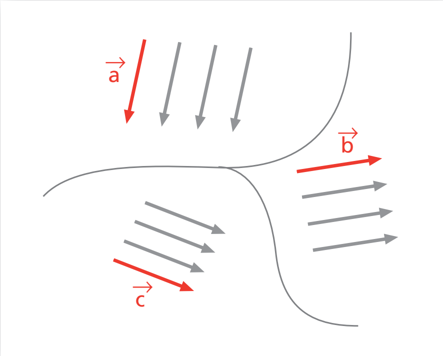
DEFINIZIONE

Vettore

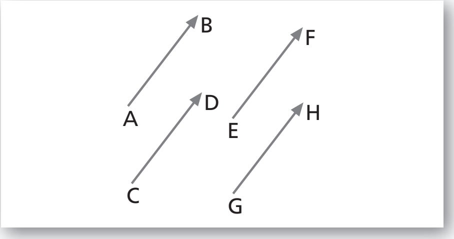
Si chiama vettore libero, o semplicemente vettore, ogni classe di equivalenza relativa alla relazione di equipollenza fra segmenti orientati.



Indichiamo con V l'**insieme dei vettori liberi del piano**.



▶ **Figura 2** Ogni segmento orientato è equipollente a infiniti altri segmenti. L'insieme dei segmenti fra loro equipollenti è un vettore.



▲ **Figura 3** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$ sono segmenti orientati equipollenti, cioè rappresentanti dello stesso vettore: ciascuno di essi è un vettore applicato.

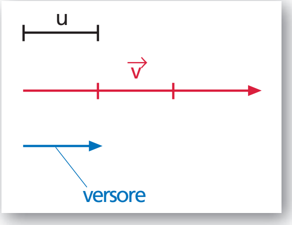
Per indicare un vettore libero usiamo una lettera minuscola sormontata da una freccia ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$), oppure uno dei segmenti orientati ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$).

Ogni segmento orientato appartenente a una medesima classe di equivalenza è, infatti, un particolare **rappresentante** di quella classe, cioè del vettore, e si dice **vettore applicato**. Il primo estremo di un vettore applicato si chiama **punto di applicazione**. Un vettore $\overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da:

- il **modulo**, ossia la misura della lunghezza del segmento AB rispetto a un'unità prefissata;
- la **direzione**, cioè la direzione della retta a cui appartiene il segmento;
- il **verso**.

Il modulo di un vettore $\vec{v}$ si indica con uno dei seguenti simboli:

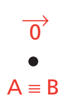
$$\|\vec{v}\|; \quad v; \quad |\vec{v}|.$$



▲ **Figura 4** $\|\vec{v}\| = 3$.

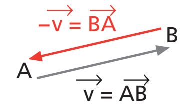
Per esempio, il vettore della figura 4 ha modulo 3 rispetto all'unità u. Scriviamo $\|\vec{v}\| = 3$ oppure $v = 3$ o anche $|\vec{v}| = 3$.

Si chiama **versore** del vettore $\vec{v}$ un vettore di modulo unitario con la stessa direzione e verso di $\vec{v}$.



Si chiama **vettore nullo** la classe di equivalenza dei segmenti con estremi coincidenti. La sua direzione e il suo verso sono indeterminati. Esso si rappresenta mediante un punto e si indica con $\vec{0}$ oppure con **0**.

Dato un vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, si chiama **vettore opposto** di $\vec{v}$, e si indica con $-\vec{v}$, il vettore avente lo stesso modulo e la stessa lunghezza e direzione ma verso opposto di $\vec{v}$, cioè la classe di equivalenza del segmento orientato $\overrightarrow{BA}$.



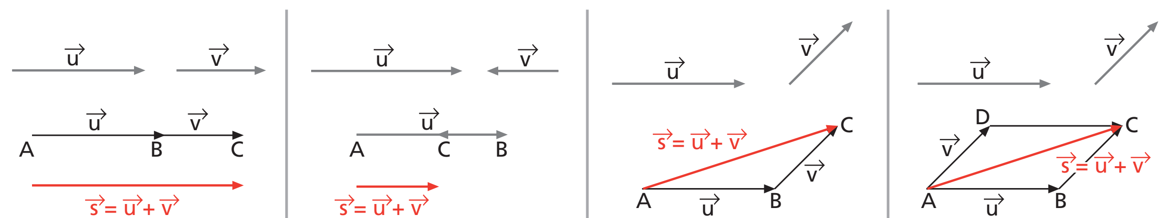
Prime operazioni con i vettori

Addizione di vettori

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, la loro **somma** $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ è un vettore che si ottiene nel modo descritto di seguito; rappresentiamo $\vec{u}$ con il segmento $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ con il segmento $\overrightarrow{BC}$ consecutivo al primo.

- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione e verso (figura 5*a*), il vettore somma $\vec{s}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e modulo uguale alla somma dei moduli.
- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione ma verso opposto (figura 5*b*), il vettore somma $\vec{s}$ ha la stessa direzione di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso uguale a quello del vettore con modulo maggiore e modulo pari alla differenza dei moduli.
- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno direzioni diverse (figura 5*c*), il vettore somma $\vec{s}$ è rappresentato dal segmento $\overrightarrow{AC}$ che ha lunghezza e direzione del terzo lato del triangolo individuato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (**regola del triangolo**).
  È equivalente considerare la diagonale $\overrightarrow{AC}$ del parallelogramma determinato dai due rappresentanti $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AD}$ di $\vec{v}$ applicati entrambi in A (**regola del parallelogramma**) (figura 5*d*).

● Diciamo che due segmenti orientati sono *consecutivi* quando il secondo estremo del primo segmento coincide con il primo estremo del secondo segmento.



a. Somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi stessa direzione e stesso verso.

b. Somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi stessa direzione e verso opposto.

c. Somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi direzioni diverse, mediante la regola del triangolo.

d. Somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi direzioni diverse, mediante la regola del parallelogramma.

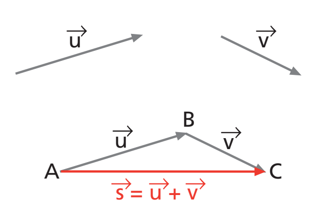
▲ **Figura 5**

Riassumendo, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Somma di due vettori

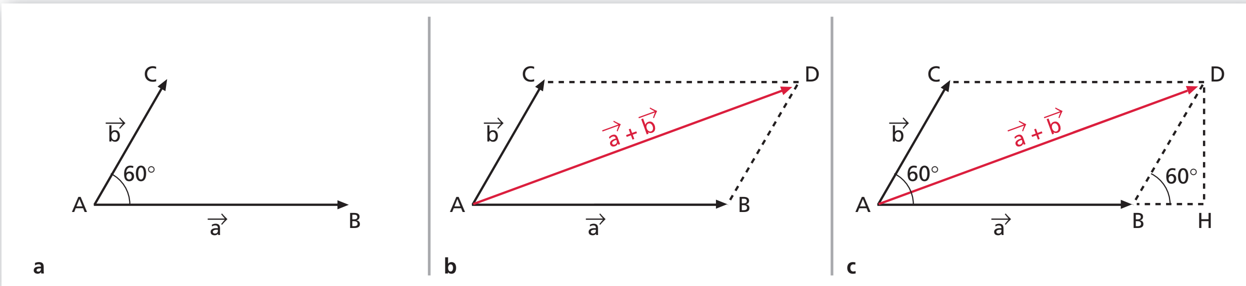
Il vettore somma $\vec{s}$ di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è rappresentato da un segmento orientato che si ottiene raffigurando consecutivamente i vettori dati e considerando come primo estremo il primo estremo di $\vec{u}$ e come secondo il secondo estremo di $\vec{v}$.



● Il vettore somma $\vec{s}$ si chiama anche **risultante**.

ESEMPIO

Troviamo il vettore somma dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ della figura, aventi i moduli $a = 48$ e $b = 20$ (figura 6*a*).



▲ **Figura 6**

Consideriamo il parallelogramma formato dai due vettori (figura 6*b*).

Calcoliamo il modulo di $\overrightarrow{AD}$.

Consideriamo la proiezione H del punto D sulla retta AB (figura 6*c*). Nel triangolo rettangolo BDH, poiché $\overline{BD} = 20$ e $D\widehat{B}H = 60°$, si ha $\overline{BH} = 10$ e $\overline{DH} = 10\sqrt{3}$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AHD:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HD}^2} = \sqrt{58^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{3664} \simeq 60,5.$$

● In generale, per calcolare il modulo della somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si applica il teorema del coseno. Osservando la figura 7, abbiamo

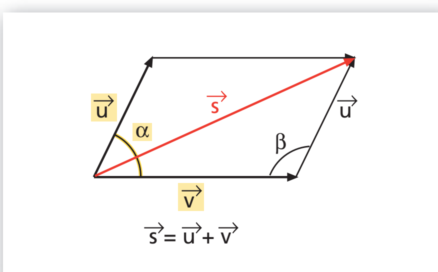
$$\|\vec{s}\| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2u \cdot v \cdot \cos\beta},$$

ed essendo $\beta = \pi - \alpha$, e quindi $\cos\beta = -\cos\alpha$, otteniamo:

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2u \cdot v \cdot \cos\alpha}.$$

● Il *teorema di Carnot* o *del coseno* afferma che in un triangolo il quadrato della misura a di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure b e c degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo α che essi formano:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$



◄ **Figura 7**

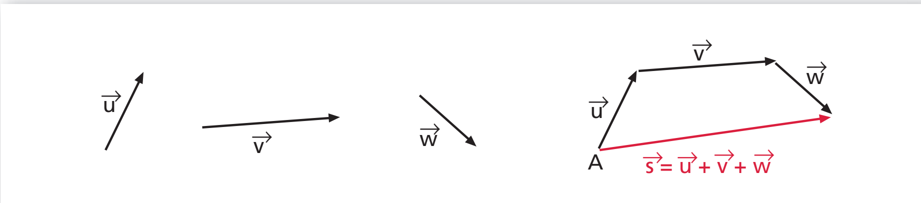
L'operazione che a due vettori associa la loro somma si dice **addizione**.
Si può dimostrare che l'addizione di vettori gode delle seguenti **proprietà**:

- *proprietà commutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$;
- *proprietà associativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$;
- il vettore nullo $\vec{0}$ è l'*elemento neutro*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$, $\forall\, \vec{v} \in V$;
- per ogni $\vec{v} \in V$ esiste il vettore *opposto* $-\vec{v}$: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$.

● Il simbolo $\forall$ significa *per ogni*.

Dati tre o più vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$, la loro somma si ottiene sommando i primi due e poi sommando al vettore ottenuto $\vec{u} + \vec{v}$ il terzo $\vec{w}$ e così via.
Graficamente il vettore risultante si ottiene riportando di seguito, a partire da un punto A, i segmenti orientati che rappresentano i vettori da sommare (figura 8).

◀ Figura 8



Si ottiene una poligonale il cui lato che congiunge A con l'ultimo estremo della poligonale rappresenta il vettore somma.

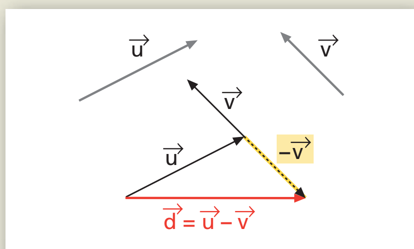
Sottrazione di vettori

L'esistenza dell'opposto di un qualsiasi vettore permette di definire la *differenza* di due vettori riconducendola a una somma.

DEFINIZIONE

Differenza di due vettori

Si chiama differenza di due vettori, scelti in un dato ordine, la somma del primo con l'opposto del secondo.



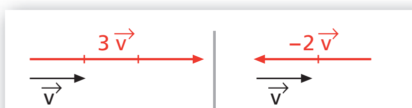
L'operazione che a due vettori associa la loro differenza si dice **sottrazione**.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Dato un vettore $\vec{v}$, possiamo determinare i vettori $3\vec{v}, -2\vec{v}, \ldots$, mediante addizioni ripetute. Per esempio:

$$3\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v},$$
$$-2\vec{v} = -\vec{v} + (-\vec{v}).$$

◀ Figura 9



a. Moltiplicazione del vettore $\vec{v}$ per lo scalare 3.

b. Moltiplicazione del vettore $\vec{v}$ per lo scalare −2.

In generale vale la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dato un vettore $\vec{v}$ e un numero reale k, si chiama prodotto di k per $\vec{v}$ il vettore $k \cdot \vec{v}$ che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, modulo uguale al prodotto del valore assoluto di k per il modulo di $\vec{v}$ e lo stesso verso di $\vec{v}$ se $k > 0$, verso opposto se $k < 0$.

L'operazione che ha come risultato questo prodotto viene detta **moltiplicazione di un vettore per uno scalare**. Si può dimostrare che gode delle seguenti proprietà:

- **proprietà distributiva** rispetto all'addizione dei numeri reali:
$$(k + p) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + p \cdot \vec{v}, \qquad \forall k, p \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{v} \in V;$$

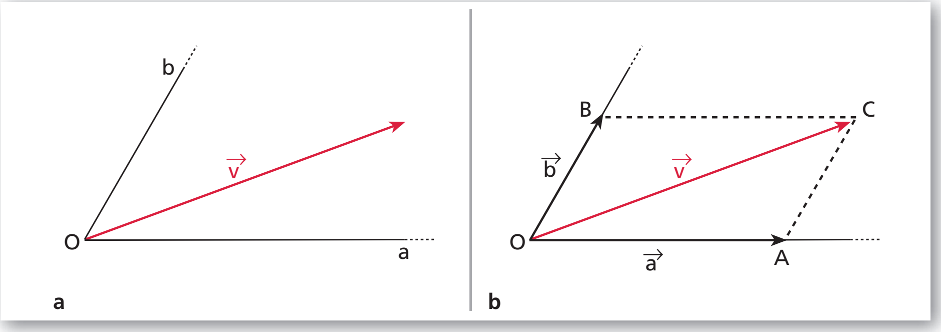
- **proprietà distributiva** rispetto all'addizione dei vettori:
  $$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}, \qquad \forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V;$$
- **proprietà associativa mista**: $k(p \cdot \vec{v}) = (kp) \cdot \vec{v}, \qquad \forall k, p \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\, \vec{v} \in V;$
- il numero 1 è l'**elemento neutro**: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{v} \in V.$

Per semplicità, utilizziamo per le operazioni fra vettori gli stessi simboli di quelle fra numeri reali. Tali simboli assumono quindi significato diverso a seconda del contesto in cui sono usati. Per esempio, il segno + fra due numeri reali denota l'addizione dei due numeri, il segno + fra vettori indica l'addizione di vettori.

La scomposizione di un vettore

Consideriamo il vettore $\vec{v}$ e le semirette Oa e Ob della figura 10a.

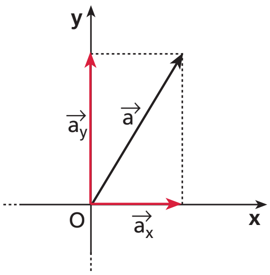
▶ Figura 10



Dall'estremo C di $\vec{v}$ tracciamo le parallele a Oa e Ob (figura 10b) e otteniamo i punti A e B, che individuano i segmenti orientati $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, cioè i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che hanno come somma $\vec{v}$.

In generale, dati un vettore $\vec{v}$ e due direzioni r e s, $\vec{v}$ si può scomporre in due vettori che hanno direzioni r e s e per somma $\vec{v}$.

In particolare, se consideriamo gli assi cartesiani, possiamo scomporre un vettore in due vettori $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ aventi le direzioni dell'asse x e dell'asse y.



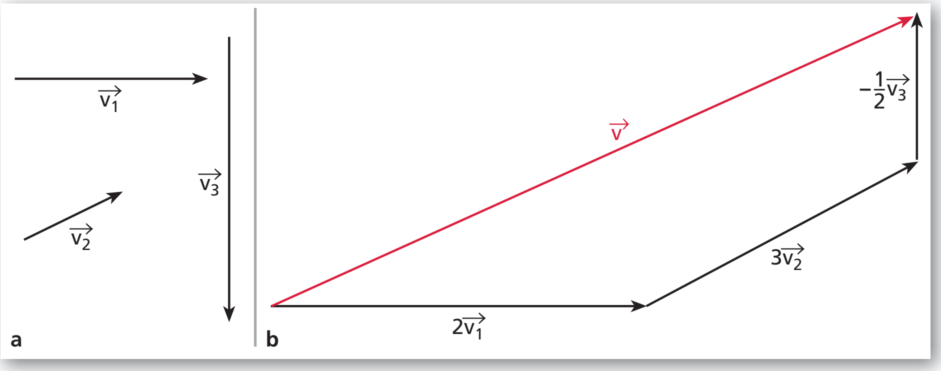
2. I VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

La combinazione lineare

Consideriamo i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ della figura 11a e i numeri reali 2, 3, $-\dfrac{1}{2}$.
Determiniamo il risultato (figura 11b) della seguente espressione:

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{v}_3.$$

▶ Figura 11



Il vettore $\vec{v}$ ottenuto è detto combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ di coefficienti 2, 3, $-\frac{1}{2}$.

Cambiando la terna di numeri reali o il loro ordine, otteniamo differenti combinazioni lineari dei vettori dati.

In generale, diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Combinazione lineare

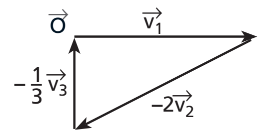
Si dice che il vettore $\vec{v}$ è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, non tutti nulli, se risulta

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n},$$

dove i coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono numeri reali.

Una combinazione lineare di vettori con coefficienti tutti nulli ha per risultato il vettore nullo.
Questo può accadere anche se i coefficienti non sono tutti nulli.

Per esempio, con i vettori considerati prima, scegliendo i coefficienti 1, $-$ 2, $-\frac{1}{3}$, otteniamo il vettore nullo.



In questo caso i vettori v_1, v_2, v_3 si dicono *linearmente dipendenti*.
In generale, diamo la seguente definizione.

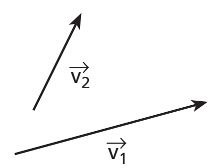
DEFINIZIONE

Vettori linearmente dipendenti

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se esistono n numeri reali $c_1, c_2, \ldots, c_n$ non tutti nulli tali che:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}.$$

Consideriamo ora due vettori del piano $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, aventi direzioni diverse (figura *a*).

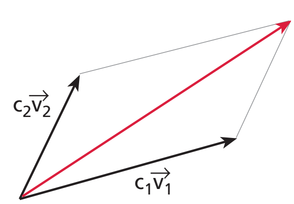


a

Qualsiasi combinazione lineare $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$ dei due vettori con coefficienti non tutti nulli non dà mai il vettore nullo, perché la somma di $c_1\vec{v_1}$ e $c_2\vec{v_2}$ al variare di c_1 e c_2 è sempre rappresentata dalla diagonale del parallelogramma formato dai due vettori.

Tale diagonale può essere nulla solo se $c_1 = c_2 = 0$.

I due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ si dicono *linearmente indipendenti*.



b

DEFINIZIONE

Vettori linearmente indipendenti

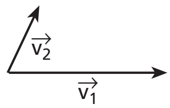
I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se l'unica combinazione lineare di questi vettori che ha come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli.

Se due vettori del piano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli, allora sono linearmente dipendenti.
Infatti, se $\vec{a} \parallel \vec{b}$, si può scrivere:

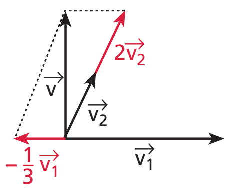
$$\vec{a} = k\vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{a} - k\vec{b} = \vec{0}.$$

Viceversa, se due vettori sono linearmente dipendenti, allora sono paralleli.
Si può dimostrare che nel *piano* il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è *due*, mentre nello spazio è *tre*.

Se due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ del piano sono linearmente indipendenti, allora ogni altro vettore $\vec{v}$ del piano si può scrivere come una combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Diciamo allora che $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono una **base** del piano.



a



b

ESEMPIO

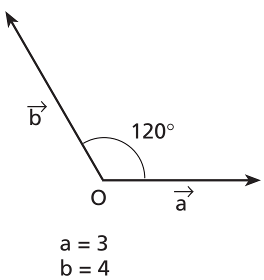
I vettori della figura *a*, poiché non sono paralleli, costituiscono una base del piano.
Ogni vettore del piano si può ottenere come combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
Per esempio, il vettore $\vec{v}$ nella figura *b* si ottiene con la somma $-\frac{1}{3}\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

In particolare, nel piano cartesiano, due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ con le direzioni degli assi cartesiani costituiscono una base.
Analogamente, per lo spazio, tre vettori non complanari $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, con le direzioni degli assi cartesiani, costituiscono una base.

3. IL PRODOTTO SCALARE E IL PRODOTTO VETTORIALE

Il prodotto scalare

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non nulli e sia α l'angolo che essi formano.



DEFINIZIONE

Prodotto scalare
Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il numero $ab\cos\alpha$.
Si indica con $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

ESEMPIO

Il prodotto scalare dei due vettori della figura precedente è:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos 120° = 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$$

Il prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non nulli può essere positivo, negativo o nullo a seconda dell'angolo che essi formano. In particolare:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad \text{se} \qquad \alpha = 90°$$

e viceversa.
Possiamo allora scrivere la seguente **condizione di perpendicolarità**.

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non nulli sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

Se due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli, si ha $\alpha = 0°$, quindi $\cos\alpha = 1$ e il prodotto scalare risulta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab.$$

Per il prodotto scalare valgono le seguenti proprietà:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, **proprietà commutativa**;

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, **proprietà distributiva**.

Il prodotto vettoriale

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non nulli che formano un angolo α.

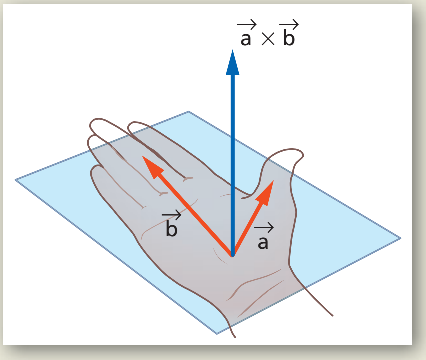
DEFINIZIONE

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore $\vec{c}$ che ha:

- **modulo** uguale ad $ab \operatorname{sen} \alpha$;
- **direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
- **verso** dato dalla regola della mano destra, illustrata nella figura.

Si indica con $\vec{a} \times \vec{b}$.



Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa,

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a},$$

ma gode della proprietà distributiva:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

● Per il prodotto vettoriale si ha:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Se due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo:

se $\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$, allora $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

In particolare, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

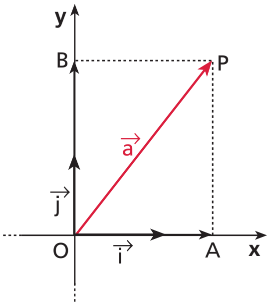
4. LA RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

I vettori nel piano

Le componenti cartesiane

Consideriamo il piano cartesiano xOy e disegniamo un vettore $\vec{a}$ che parte dall'origine.

Indichiamo con $\vec{i}$ il versore avente la direzione e il verso dell'asse x e con $\vec{j}$ il versore avente la direzione e il verso dell'asse y.



Se dal punto P mandiamo le parallele agli assi cartesiani, otteniamo i punti A e B che individuano i segmenti orientati $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Se i moduli di OA e OB sono rispettivamente a_x e a_y, possiamo scrivere:

$$\overrightarrow{OA} = a_x \vec{i} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OB} = a_y \vec{j}.$$

Riassumendo, se scomponiamo il vettore $\vec{a}$ lungo gli assi cartesiani, otteniamo:

$$\boldsymbol{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}}.$$

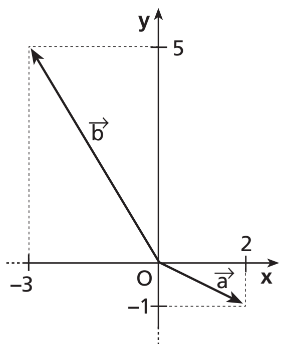
I versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono una base per il piano cartesiano. Ogni vettore può infatti essere scritto come combinazione lineare dei due versori, secondo le sue componenti cartesiane.

a_x e a_y sono le componenti cartesiane del vettore $\vec{a}$. Per identificare il vettore con le sue componenti cartesiane scriviamo anche

$$\vec{a} = (a_x; a_y).$$

ESEMPIO

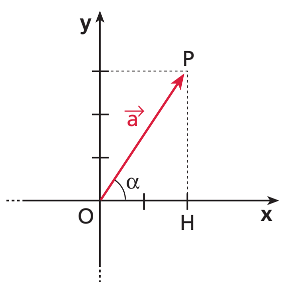
I vettori $\vec{a} = (2; -1)$ e $\vec{b} = (-3; 5)$ nel piano cartesiano hanno la rappresentazione della figura a lato.



In particolare, per i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$: $\vec{i}(1; 0)$ e $\vec{j}(0; 1)$.

Il modulo e la direzione

Se consideriamo il vettore $\vec{a} = (2; 3)$, possiamo trovare il suo modulo applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPH:



$$a = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Possiamo anche determinare l'angolo α che il vettore forma con la direzione positiva dell'asse x, ricordando le relazioni valide in un triangolo rettangolo,

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos\alpha \quad \text{e} \quad \overline{PH} = \overline{OP} \operatorname{sen}\alpha,$$

e cioè

$$2 = \sqrt{13}\cos\alpha \quad \text{e} \quad 3 = \sqrt{13}\operatorname{sen}\alpha,$$

da cui:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Con la calcolatrice, usando il tasto $\sin^{-1}$ o il tasto $\cos^{-1}$, otteniamo $\alpha \simeq 56,3$.
In generale, dato un vettore $\vec{a} = (a_x; a_y)$, il modulo di a è

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

mentre l'angolo che $\vec{a}$ forma con la direzione positiva dell'asse x si ottiene con le formule:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{a_y}{a}.$$

Riscriviamo tali formule e otteniamo le componenti cartesiane di $\vec{a}$ in funzione del modulo a e dell'angolo α con la direzione positiva dell'asse x:

$$a_x = a\cos\alpha \quad \text{e} \quad a_y = a\operatorname{sen}\alpha.$$

Consideriamo $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e $\vec{b} = (b_x; b_y)$ ed esprimiamo mediante le componenti cartesiane i risultati delle operazioni con i vettori.

Somma

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) =$$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}.$$

Quindi:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y).$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (-4; 2)$ e $\vec{b} = (2; -1)$, il vettore somma $\vec{s}$ è:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (-4 + 2; 2 - 1) = (-2; 1).$$

Differenza

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + (-b_x \vec{i} - b_y \vec{j}) =$$

$$= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j}.$$

Quindi:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y).$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (-3; 2)$ e $\vec{b} = (5; -8)$, il vettore differenza $\vec{d}$ è:

$$\vec{a} - \vec{b} = (-3 - 5; 2 + 8) = (-8; 10).$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dati il vettore $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e lo scalare k, si ha:

$$k\vec{a} = k(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) = ka_x \vec{i} + ka_y \vec{j}.$$

Quindi:

$$k\vec{a} = (ka_x; ka_y).$$

ESEMPIO

Dato il vettore $\vec{a} = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$, si ha:

$$-8\vec{a} = \left(-8 \cdot 2; -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (-16; 4).$$

Prodotto scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j}.$$

Applichiamo la proprietà distributiva.

Poiché:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1, \quad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \qquad \text{perché vettori paralleli di modulo 1,}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \text{perché vettori perpendicolari,}$$

allora il prodotto scalare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ diventa:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y .$$

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{a} = (2; -3)$ e $\vec{b} = (5; -1)$, il prodotto scalare è:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1) = 10 + 3 = 13.$$

È possibile determinare l'angolo α formato da due vettori $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e $\vec{b} = (b_x; b_y)$ considerando che:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha \quad \to \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}.$$

Essendo $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{ab}.$$

ESEMPIO

Troviamo l'angolo formato dai vettori $\vec{a} = (1; 2)$ e $\vec{b} = (3; -1)$.

Calcoliamo $a = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ e $b = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$;

Quindi:

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 3 + 2(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{3-2}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Con la calcolatrice, si ottiene $\alpha \simeq 82°$.

► Figura 12

LABORATORIO DI MATEMATICA
I VETTORI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive calcoliamo le componenti p e q dei vettori $\vec{u} = (p; -2)$ e $\vec{v} = (1; q)$ del piano in modo che l'espressione $2\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$ valga $\vec{r} = (-3; -2)$.

Le coordinate *p* e *q*

- Diamo *Crea_Espressione* e scriviamo nella riga di editazione la definizione del vettore $\vec{u}$, u := [p, −2], e con INVIO la immettiamo nella #1 (figura 1).
- Operiamo in modo simile per la definizione del vettore $\vec{v}$, scrivendo v := [1, q] e immettendola nella #2.
- Scriviamo r := [−3, −2], la definizione di $\vec{r}$, e la inseriamo nella #3.
- Digitiamo l'espressione 2u + 1/2*(u − v) = r e la poniamo nella #4.
- Applichiamo sulla #4 il comando *Risolvi_Espressione* e usciamo dalla corrispondente finestra di dialogo con un clic su *Risolvi*, ottenendo l'impostazione della soluzione nella #5 e la soluzione medesima nella #6.

```
#1:   u := [p, -2]
#2:   v := [1, q]
#3:   r := [-3, -2]
#4:   2·u + (u - v)/2 = r
#5:   SOLVE(2·u + (u - v)/2 = r)
#6:   p = -1 ∧ q = -6
```

▶ **Figura 1**

Esercitazioni

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ del piano formano un angolo convesso α, i loro moduli sono $a = 5$ e $b = 8$. Il vettore $\vec{c}$ è uguale a $h\vec{a} + \vec{b}$ e forma con $\vec{a}$ l'angolo convesso β. Con Derive determina le grandezze richieste nei seguenti esercizi attraverso i dati assegnati e poi traccia il grafico dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $h\vec{a}$ e $\vec{c}$.

1 Dati l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ e lo scalare $h = 3$, trova il modulo c e l'angolo β. [$c = 13$ e $\beta = 0{,}5621$]

2 Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo β.
[$h_1 = 4{,}55$ e $\beta_1 = 0{,}3537$; $h_2 = -2{,}95$ e $\beta_2 = -0{,}3537$]

3 Dati il modulo $c = 20$ e l'angolo $\beta = \frac{1}{9}\pi$, calcola lo scalare h e l'angolo α.
[$h = 2{,}9$ e $\alpha = 1{,}0256 \vee h = -2{,}93$ e $\alpha = 2{,}1159$]

Dati i vettori $\vec{u} = (1; -3)$, $\vec{v} = (k; -4)$ e $\vec{w} = (5; h)$, determina h e k in modo che valgano le seguenti uguaglianze. Verifica graficamente i risultati.

4 $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2; 3)$ [$h = 10$ e $k = -4$]

5 $\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{w}) = (12; -10)$ [$h = 10$ e $k = 27$]

6 $3\vec{v} - 2\vec{w} - \vec{u} = (-2; 9)$ [$h = -9$ e $k = 3$]

1. I VETTORI DEL PIANO

▶ Teoria a pag. 1

1 **VERO O FALSO?**

a) Il vettore $-4\vec{u}$ ha modulo -4. V F

b) Se due vettori hanno lo stesso versore, allora hanno la stessa direzione e lo stesso verso. V F

c) Se due segmenti orientati hanno la stessa lunghezza, sono equipollenti. V F

d) Il vettore opposto di $\frac{4}{5}\vec{u}$ è $\frac{5}{4}\vec{u}$. V F

e) Ogni punto del piano rappresenta il vettore nullo. V F

2 Indica quale o quali tra le seguenti grandezze è rappresentata da un vettore:

temperatura, massa, forza, età, area, volume.

3 Dato il versore $\vec{u}$, indica modulo, direzione e verso di $-5\vec{u}$.

4 Rappresenta un vettore $\vec{u}$ a tuo piacimento e i seguenti vettori:

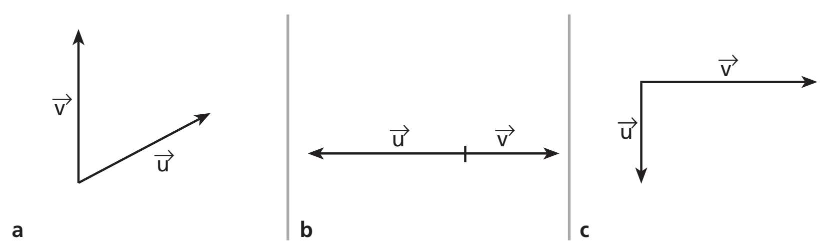
$$2\vec{u}; \quad -\frac{1}{2}\vec{u}; \quad -4\vec{u}; \quad \frac{3}{2}\vec{u}.$$

Le operazioni con i vettori

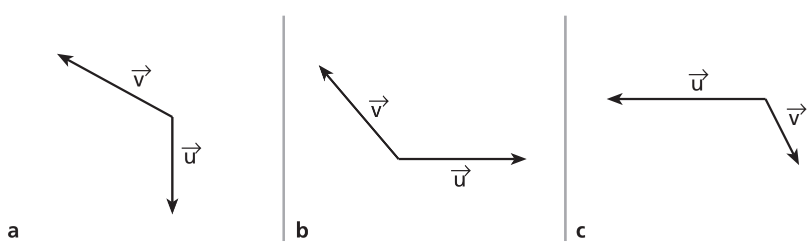
Addizione di vettori

Traccia il vettore somma dei vettori disegnati nelle figure.

5



6



7 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, aventi modulo $a = 16$, $b = 12$, rappresenta il vettore somma e determina il suo modulo nel caso che l'angolo α da essi formato sia:

a) 90°; b) 180°; c) 0°; d) 60°.

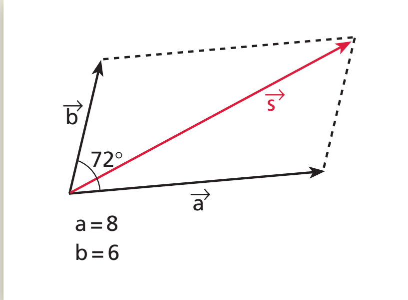
[a) 20; b) 4; c) 28; d) $\simeq 24,3$]

8 Se due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ consecutivi e il loro vettore somma hanno lo stesso modulo, uguale a 10, quanto vale l'angolo formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$?

[120°]

9 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo la somma $\vec{s}$ dei due vettori della figura e calcoliamo il modulo di $\vec{s}$.



Il vettore $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Il modulo di $\vec{s}$ si ottiene con il teorema del coseno:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 72°}.$$

Sostituiamo i valori di a e b e calcoliamo:

$$s = \sqrt{64 + 36 + 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 72°} \simeq \sqrt{100 + 96 \cdot 0,3} = \sqrt{128,8} \simeq 11,3.$$

Disegna il vettore somma $\vec{s}$ dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di cui è assegnato il modulo e l'angolo α che formano. Calcola il modulo di $\vec{s}$.

10 $a = 3,\quad b = 5,\quad \alpha = 120°.$ [$s \simeq 4{,}4$]

11 $a = 4,\quad b = 12,\quad \alpha = 150°.$ [$s \simeq 8{,}8$]

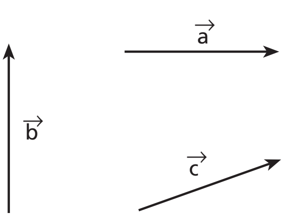
12 $a = 10,\quad b = 6,\quad \alpha = 80°.$ [$s \simeq 12{,}5$]

13 $a = 12,\quad b = 9,\quad \alpha = 90°.$ [$s \simeq 15$]

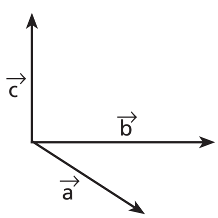
14 $a = 15,\quad b = 8,\quad \alpha = 105°.$ [$s \simeq 15{,}1$]

Trova graficamente il vettore somma dei vettori indicati.

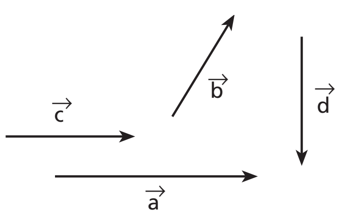
15



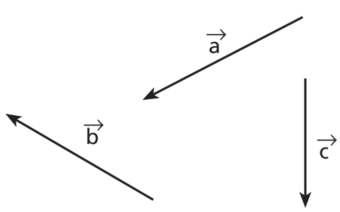
16



17

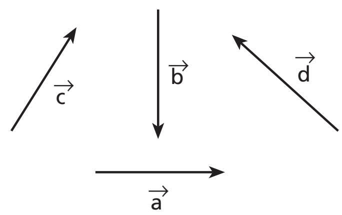


18

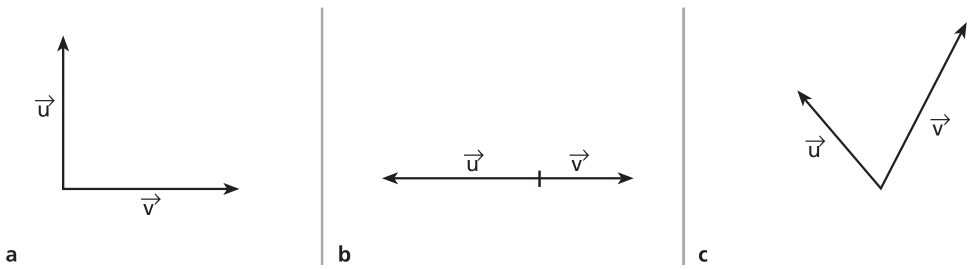


Sottrazione di vettori

19 Disegna i vettori opposti dei vettori indicati.



20 Traccia il vettore differenza $\vec{u} - \vec{v}$ dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ disegnati in figura.



21 Se la somma e la differenza di due vettori hanno lo stesso modulo, quanto misura l'angolo tra i due vettori? [90°]

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

22 Disegna un vettore $\vec{a}$ e rappresenta poi i vettori: $-2\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, $3\vec{a}$.

23 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, con modulo $a = 8$ e $b = 6$, formano un angolo di 90°.
Determina il modulo dei vettori:

$$\vec{a} - 2\vec{b}; \qquad \frac{1}{2}(\vec{a} + 3\vec{b}); \qquad -3(-2\vec{a} + 4\vec{b}).$$

[$\simeq$ 14,4; $\simeq$ 9,8; $\simeq$ 86,5]

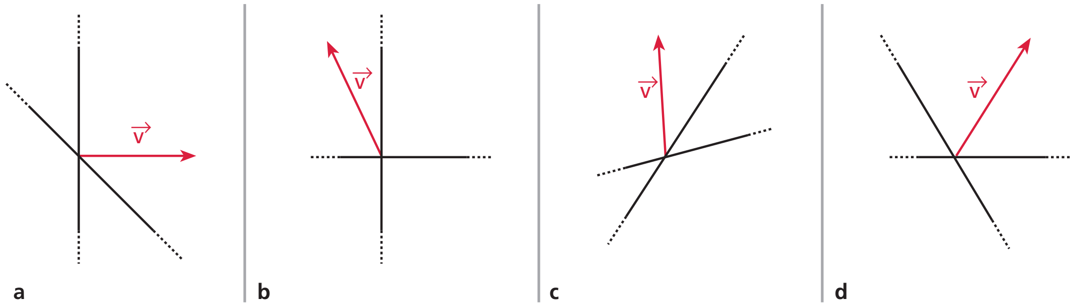
24 Disegna due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e verifica le proprietà:

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$, con $k = 3$;

$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$, con $a = 4$ e $b = -2$.

La scomposizione di un vettore

25 Scomponi il vettore $\vec{v}$ lungo le due direzioni assegnate.



2. I VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

▶ Teoria a pag. 6

26 Scrivi la combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ secondo i numeri $-2, 4, \frac{1}{2}$. $\left[-2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3\right]$

27 **VERO O FALSO?**

a) Due vettori linearmente dipendenti hanno come somma il vettore nullo. V F

b) Due vettori che hanno come somma il vettore nullo sono linearmente dipendenti. V F

c) Due vettori perpendicolari tra loro sono linearmente indipendenti. V F

d) I vettori $3\vec{a}$ e $-2\vec{a}$ sono linearmente dipendenti. V F

28 **VERO O FALSO?**

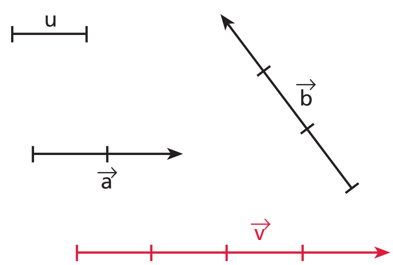
a) Nel piano, due vettori qualsiasi costituiscono una base. V F

b) Nello spazio, i versori aventi le direzioni degli assi cartesiani formano una base. V F

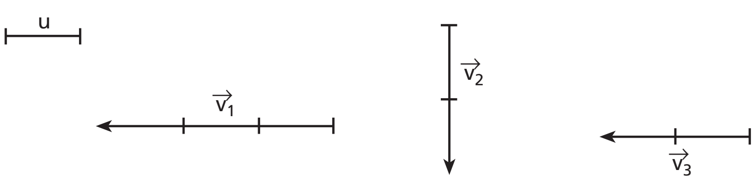
c) Una base del piano è una coppia di vettori che genera tutti i vettori del piano. V F

d) Due vettori con direzioni che formano fra loro un angolo di 45° costituiscono una base del piano. V F

29 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ della figura, indica quale loro combinazione lineare permette di ottenere il vettore $\vec{v}$.



30 Dati i vettori della figura, rappresenta il vettore $\vec{v}$, combinazione lineare di coefficienti $-1, -2, 3$. Determina il modulo di $\vec{v}$.



[5]

3. IL PRODOTTO SCALARE E IL PRODOTTO VETTORIALE

▶ Teoria a pag. 8

31 **VERO O FALSO?**

a) Se due vettori sono perpendicolari, il prodotto scalare è nullo. V F

b) Il prodotto scalare di due vettori è un vettore. V F

c) Se due vettori opposti hanno lo stesso modulo, il prodotto scalare è nullo. V F

d) Se il prodotto scalare di due vettori è nullo, i vettori hanno la stessa direzione. V F

32 VERO O FALSO?

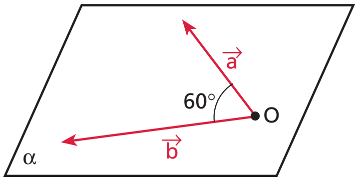
a) Se due vettori sono perpendicolari, il loro prodotto vettoriale è nullo. V F

b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$. V F

c) Il risultato di $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ è un numero. V F

d) Se il prodotto vettoriale di due vettori è nullo, i vettori hanno la stessa direzione e verso. V F

33 Considera i vettori della figura, che si trovano nel piano α.
Determina $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$.



a = 2 b = 3

$[3; |\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}]$

34 Calcola il prodotto scalare e il prodotto vettoriale dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che hanno $a = 9$ e $b = 15$ e che formano un angolo di 30°.

$\left[\dfrac{135\sqrt{3}}{2}; |\vec{a} \times \vec{b}| = \dfrac{135}{2}\right]$

35 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, con $a = 6$ e $b = 8$, calcola $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sapendo che l'angolo α fra essi compreso è:

a) 0°; b) 180°; c) 90°; d) 60°.

[a) 48; b) -48; c) 0; d) 24]

36 Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, con $a = 10$ e $b = 6$, calcola $\vec{a} \times \vec{b}$, sapendo che l'angolo α fra essi compreso è:

a) 90°; b) 0°; c) 45°; d) 30°.

[$|\vec{a} \times \vec{b}|$: a) 60; b) 0; c) $30\sqrt{2}$; d) 30]

37 Calcola $\vec{a} \cdot \vec{a}$ e $\vec{a} \times \vec{a}$, sapendo che $a = 6$. $[36; \vec{0}]$

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, con $a = 4$ e $b = 12$, formano un angolo di 60°. Calcola le seguenti espressioni.

38 $(-\vec{a}) \cdot \vec{b}$; $(2\vec{a}) \times \vec{b}$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$. $[-24; |2\vec{a} \times \vec{b}| = 48\sqrt{3}; 0]$

39 $\vec{b} \cdot 3\vec{a}$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$; $\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$. $[72; -1728; 0]$

40 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di moduli $a = 3$ e $b = 8$, hanno prodotto scalare -12. Determina l'angolo α formato dai vettori.

[120°]

41 Il prodotto scalare dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, che formano un angolo di 150°, è -90.
Sapendo che il modulo di $\vec{v}$ è 10, trova il modulo di $\vec{w}$.

$[6\sqrt{3}]$

42 Spiega perché il prodotto vettoriale di due vettori ha modulo uguale all'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori.

43 Dimostra che per ogni vettore $\vec{a}$ è vero che $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ e $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

4. LA RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

▶ Teoria a pag. 9

I vettori nel piano

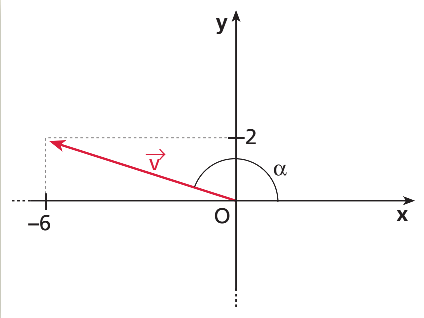
44 Rappresenta i vettori $\vec{a} = (-4; 2)$, $\vec{b} = (-3; -1)$, $\vec{c} = (8, 6)$ nel piano cartesiano.

45 ESERCIZIO GUIDA

Dato il vettore $\vec{v} = (-6; 2)$, determiniamo il modulo e la direzione di v.

Rappresentiamo $\vec{v}$ nel piano cartesiano e calcoliamo il modulo $\vec{v}$ con la formula $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$:

$$v = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$



Determiniamo la direzione di $\vec{v}$ calcolando l'angolo α che $\vec{v}$ forma con la direzione positiva dell'asse x.

Utilizziamo le formule:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{v_y}{v}.$$

Otteniamo:

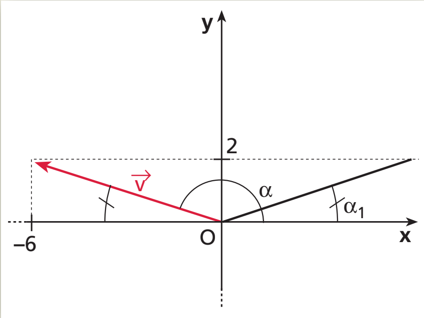
$$\cos\alpha = -\frac{6}{2\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Con la funzione $\cos^{-1}$ della calcolatrice, otteniamo $\alpha \simeq 161°$. Osserviamo che, utilizzando la formula del seno, abbiamo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

e con la funzione sen^{-1} della calcolatrice otteniamo il valore dell'angolo α_1, con seno che vale $\frac{1}{\sqrt{10}}$, del primo quadrante; per ottenere α dobbiamo calcolare:

$$\alpha = 180° - \alpha_1.$$



Trova il modulo e la direzione dei seguenti vettori.

46 $\vec{a} = (3; 4)$; $\quad \vec{b} = (-5; 5)$; $\quad \vec{c} = (2; 4)$.

[$|\vec{a}| = 5, \alpha \simeq 53°$; $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}, \alpha = 135°$; $|\vec{c}| = 2\sqrt{5}, \alpha \simeq 63°$]

47 $\vec{a} = (-3\sqrt{3}; 3)$; $\quad \vec{b} = (4; -5)$; $\quad \vec{c} = (9; 6)$.

[$|\vec{a}| = 6, \alpha = 150°$; $|\vec{b}| = 6{,}4, \alpha \simeq 309°$; $|\vec{c}| = 10{,}8, \alpha \simeq 34°$]

48 $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\quad \vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$; $\quad \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$.

[$|\vec{a}| = 5, \alpha \simeq 127°$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}, \alpha = 225°$; $|\vec{c}| \simeq 2\sqrt{10}, \alpha = 72°$]

Con i dati forniti, determina ciò che è richiesto.

49 $a = 8$; $\alpha = 30°$. a_x? a_y? $[4\sqrt{3}, 4]$

50 $a = 6$; $\alpha = 135°$. a_x? a_y? $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

51 $a_x = 12$; $\alpha = 60°$. a? a_y? $[24, 12\sqrt{3}]$

52 $a_y = -10$; $\alpha = 210°$. a? a_x? $[20, -10\sqrt{3}]$

Dati i vettori $\vec{a} = (2; -5)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-6; 3)$, esegui le seguenti operazioni.

53 $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{b} + \vec{c}$. $[(3; -7); (1; -3); (-5; 1)]$

54 $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$; $\vec{a} + 4\vec{b}$; $2(\vec{b} - \vec{c})$. $[(6; -11); (6; -13); (14; -10)]$

55 $2\vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $-4\vec{c} + \vec{b}$. $[(-10; 2); (-5; 0); (25; -14)]$

56 Dati i vettori $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$, trova modulo e direzione dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.
$[|\vec{a}| = 5, \alpha \simeq 143°; |\vec{b}| = 10, \alpha \simeq 53°; |\vec{a} + \vec{b}| = 5\sqrt{5}, \alpha \simeq 80°; |\vec{a} - \vec{b}| = 5\sqrt{5}, \alpha \simeq 207°]$

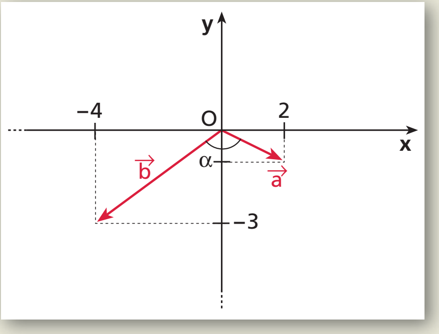
Il prodotto scalare

57 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati i vettori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{b} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$, determiniamo il loro prodotto scalare e l'angolo α formato dai due vettori.

Rappresentiamo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nel piano cartesiano e calcoliamo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ con la formula $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-4) + (-1)(-3) = -8 + 3 = -5.$$



Per calcolare l'angolo α, utilizziamo la formula:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$

Calcoliamo i moduli dei due vettori:

$$a = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, \qquad b = \sqrt{16 + 9} = 5,$$

e sostituiamo:

$$\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{5} \cdot 5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad \alpha \simeq 117°.$$

Calcola il prodotto scalare delle seguenti coppie di vettori.

58 $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$. $[-2]$

59 $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (8; -2)$. $[8]$

60 $\vec{a} = (-1; 5)$, $\vec{b} = (-6; -3)$. $[-9]$

61 $\vec{a} = -2\vec{i}$, $\vec{b} = 5\vec{j}$. $[0]$

62 $\vec{a} = 9\vec{i}$, $\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{i}$. $[-3]$